

Tema d'esame del 2 febbraio 2023

COGNOME: _____
 NOME: _____
 MATRICOLA: _____

Questo foglio deve essere consegnato con l'elaborato

1. Una ditta di logistica ha un ufficio dedicato alle spedizioni che lavora 24 ore al giorno senza interruzioni, ripetendo ogni giorno gli stessi turni. La tabella qui sotto riporta, per le varie fasce orarie, il numero minimo di lavoratori necessario: ad esempio, dalle ore 2 alle ore 6 sono necessari almeno 5 lavoratori in servizio, mentre dalle 22 alle 2 del giorno successivo ne servono almeno 7.

Fasce orarie	2 - 6	6 - 10	10 - 14	14 - 18	18 - 22	22 - 2
Minimo personale	5	15	12	19	10	7

Ogni lavoratore riceve uno stipendio mensile, lavora per 8 ore consecutive ed è assegnato ad un turno. Il turno può iniziare alle ore 2, o alle 6, o alle 10, o alle 14, o alle 18, o ancora alle 22. Formulare il modello di programmazione lineare che minimizza il costo totale mensile, tenendo conto che:

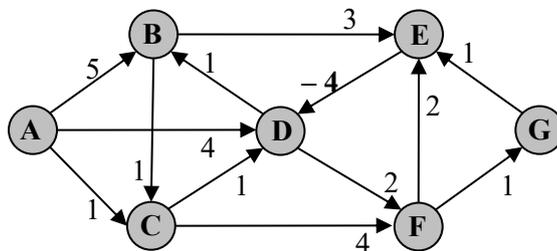
- per ragioni di sicurezza, il turno delle 2 e quello delle 22 non possono avere più di 12 lavoratori;
- per ogni turno con almeno un lavoratore, si paga un costo fisso pari al 10% della retribuzione mensile;
- l'amministrazione richiede che si possano assegnare lavoratori ad un massimo di cinque turni;
- ogni ora di lavoro tra le 18 e le 6 del giorno successivo comporta una retribuzione aggiuntiva pari al 20% della retribuzione oraria diurna.

2. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & -x_1 - x_2 - 3x_3 \\
 \text{s.t.} \quad & 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 \leq 2 \\
 & x_2 + x_3 \leq 2 \\
 & x_1 - x_2 - 2x_3 \geq -4 \\
 & x_1 \leq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

- a) lo si risolva con il metodo del simplesso, applicando la regola anticiclo di Bland;
- b) qual è il valore della soluzione ottima del corrispondente problema duale? in base a quale teorema è possibile determinarlo direttamente a partire dal risultato del punto precedente?

3. Nel seguente grafo, calcolare i cammini minimi dal nodo A verso **tutti** gli altri nodi.



- a. si scelga l'algoritmo da utilizzare e si motivi la scelta;
- b. si applichi l'algoritmo scelto (riportare e giustificare i passi dell'algoritmo in una tabella);
- c. con le informazioni disponibili dalla tabella, si riporti, se possibile, l'albero e il grafo dei cammini minimi oppure si individui, se esiste, un ciclo di lunghezza negativa (descrivere il procedimento).

... CONTINUA SUL RETRO ...

4. Enunciare le condizioni di complementarità primale-duale in generale.

Applicare tali condizioni per dimostrare che $(x_1, x_2, x_3) = (0, -2, 0)$ è soluzione ottima del seguente problema:

$$\begin{array}{rcll}
 \max & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & & \\
 \text{s.t.} & & & - & x_2 & - & x_3 & \leq & 2 & \\
 & 2x_1 & - & 2x_2 & & & & \geq & 1 & \\
 & x_1 & & & & + & 2x_3 & \leq & 3 & \\
 & x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & -2 & & \\
 & x_1 \text{ libera} & & x_2 \leq 0 & & x_3 \geq 0 & & & &
 \end{array}$$

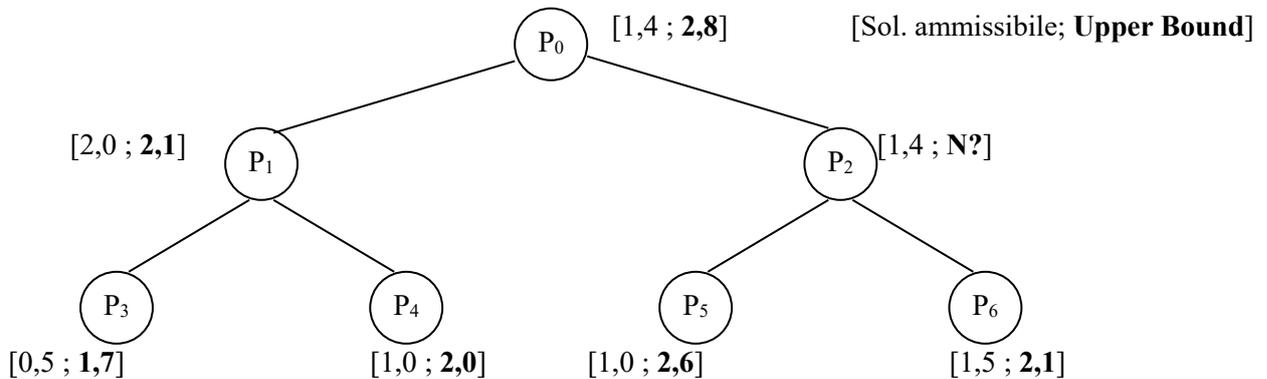
5. Si consideri il seguente tableau del simplesso:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	b
-10	0	0	-95	0	0	-1	6
-1	0	0	16	0	1	0	0
1230	0	1	(11)	1	0	0	123
2340	1	0	-2	57	0	0	234

Si dica, senza eseguire operazioni di pivot e fornendo una giustificazione teorica delle risposte:

- riusciamo a individuare una soluzione di base corrispondente? Quale? Perché non è ottima?
- perché non è consentita l'operazione di pivot sull'elemento evidenziato nel cerchio (11)?
- su quali elementi è possibile effettuare il pivot secondo le regole del simplesso (indipendentemente da regole anticiclo)?
- considerando le variabili ordinate per indice crescente, quale sarà il cambio base secondo le regole del simplesso e applicando la regola di Bland? Qual è il relativo valore della funzione obiettivo?

6. Si consideri il seguente sviluppo di un albero di Branch and Bound per un problema di ottimizzazione:



Si risponda, dando giustificazione, alle seguenti domande:

- Perché si può stabilire che, per opportuni valori di N, si tratta di un problema di massimo? Qual è un possibile valore N per l'upper bound del nodo P2?
- Qual è l'intervallo più piccolo che contiene sicuramente il valore ottimo della funzione obiettivo?
- Quali sono i nodi attualmente aperti? È possibile chiudere dei nodi? Se sì, quali e perché?
- Quale nodo sarà sviluppato per primo in una strategia Best Bound First?
- Si supponga che lo sviluppo di cui al punto precedente porti a due nodi figli, di cui uno è relativo ad un insieme di soluzioni vuoto. Si dia un esempio di valori di upper bound e soluzione ammissibile relativi al secondo nodo che consentano di riconoscere subito la soluzione ottima del problema.