DEI
DIPARTIMENTO DI
INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

Sistemi Digitali

Esercizi: minimizzazione di funzioni logiche con mappe di Karnaugh

Marta Bagatin, marta.bagatin@unipd.it

Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione

Anno accademico 2022-2023

Esercizio 1: Rappresentare in forma SOP minima la funzione

$$F(a,b,c,d) = \begin{cases} 1 \text{ se } abcd \text{ è un numero primo} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

La funzione data è rappresentabile come somma di mintermini:

$$F = \sum m(1,2,3,5,7,11,13)$$ [mintermini i cui indici sono numeri primi]

Indichiamo i mintermini della funzione con un 1 nella mappa di Karnaugh:

ab \ cd	00	01	11	10
00	$_{0}$	1 $_{1}$	1 $_{3}$	1 $_{2}$
01	$_{4}$	1 $_{5}$	1 $_{7}$	$_{6}$
11	$_{12}$	1 $_{13}$	$_{15}$	$_{14}$
10	$_{8}$	$_{9}$	1 $_{11}$	$_{10}$

Esercizio 1: Rappresentare in forma SOP minima la funzione

$$F(a,b,c,d) = \begin{cases} 1 \text{ se } abcd \text{ è un numero primo} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Ora troviamo gli implicanti primi (più grandi raggruppamenti di "1" con 1-2-4-8-16 caselle adiacenti):

ab \ cd	00	01	11	10
00	$_{0}$	1 $_{1}$	1 $_{3}$	1 $_{2}$
01	$_{4}$	1 $_{5}$	1 $_{7}$	$_{6}$
11	$_{12}$	1 $_{13}$	$_{15}$	$_{14}$
10	$_{8}$	$_{9}$	1 $_{11}$	$_{10}$

$\bar{a}d$

$\bar{a}\bar{b}c$

$b\bar{c}d$

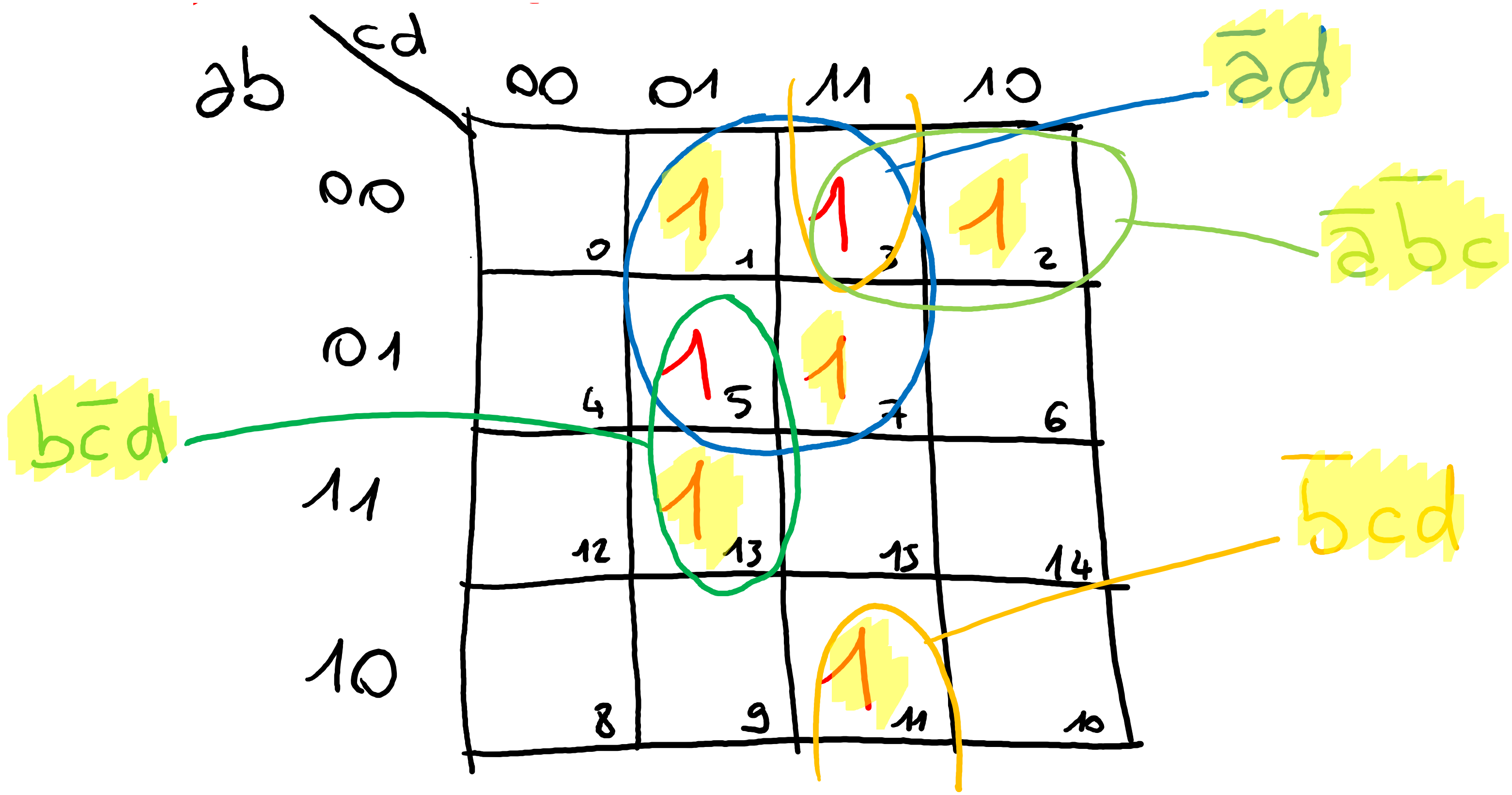
$\bar{b}cd$

$\Rightarrow$ Abbiamo 4 Implicanti Primi (IP), cioè che non possono essere resi più grandi

Esercizio 1: Rappresentare in forma SOP minima la funzione

$$F(a,b,c,d) = \begin{cases} 1 \text{ se } abcd \text{ è un numero primo} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

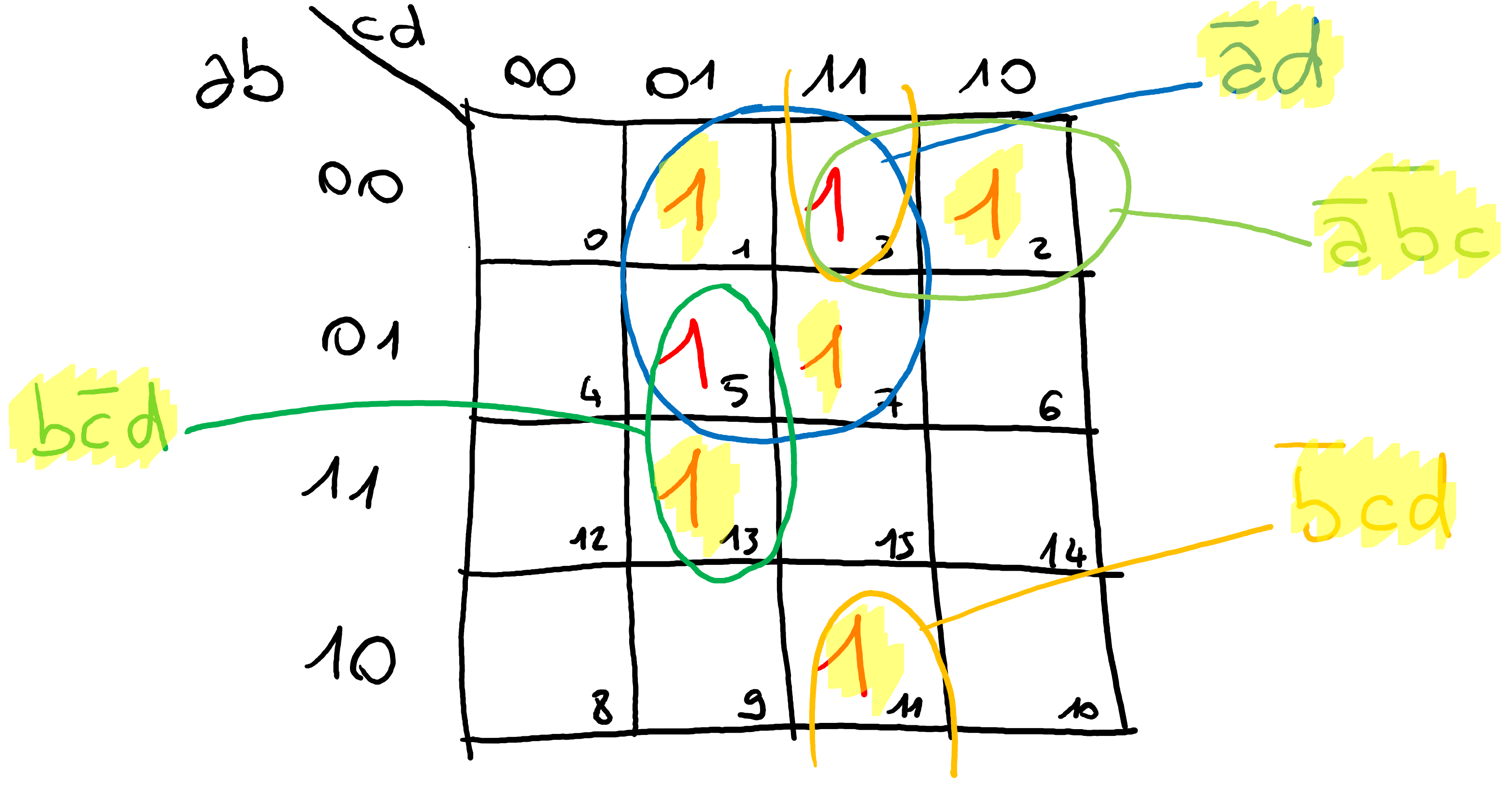
Ora degli IP individuati, troviamo quelli essenziali (IPE), cioè che coprono almeno una casella non coperta da altri implicanti:



⇒ Tutti gli IP sono anche IPE!

Esercizio 1: Rappresentare in forma SOP minima la funzione

$$F(a,b,c,d) = \begin{cases} 1 \text{ se } abcd \text{ è un numero primo} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$



Dato che tutti gli IP sono anche IPE, andranno inclusi tutti nella copertura minima SOP della funzione:

$$\boxed{F = \bar{a}d + \bar{a}\bar{b}c + \bar{b}cd + b\bar{c}d}$$

Esercizio 2: Definire la copertura minima SOP a due livelli per la funzione

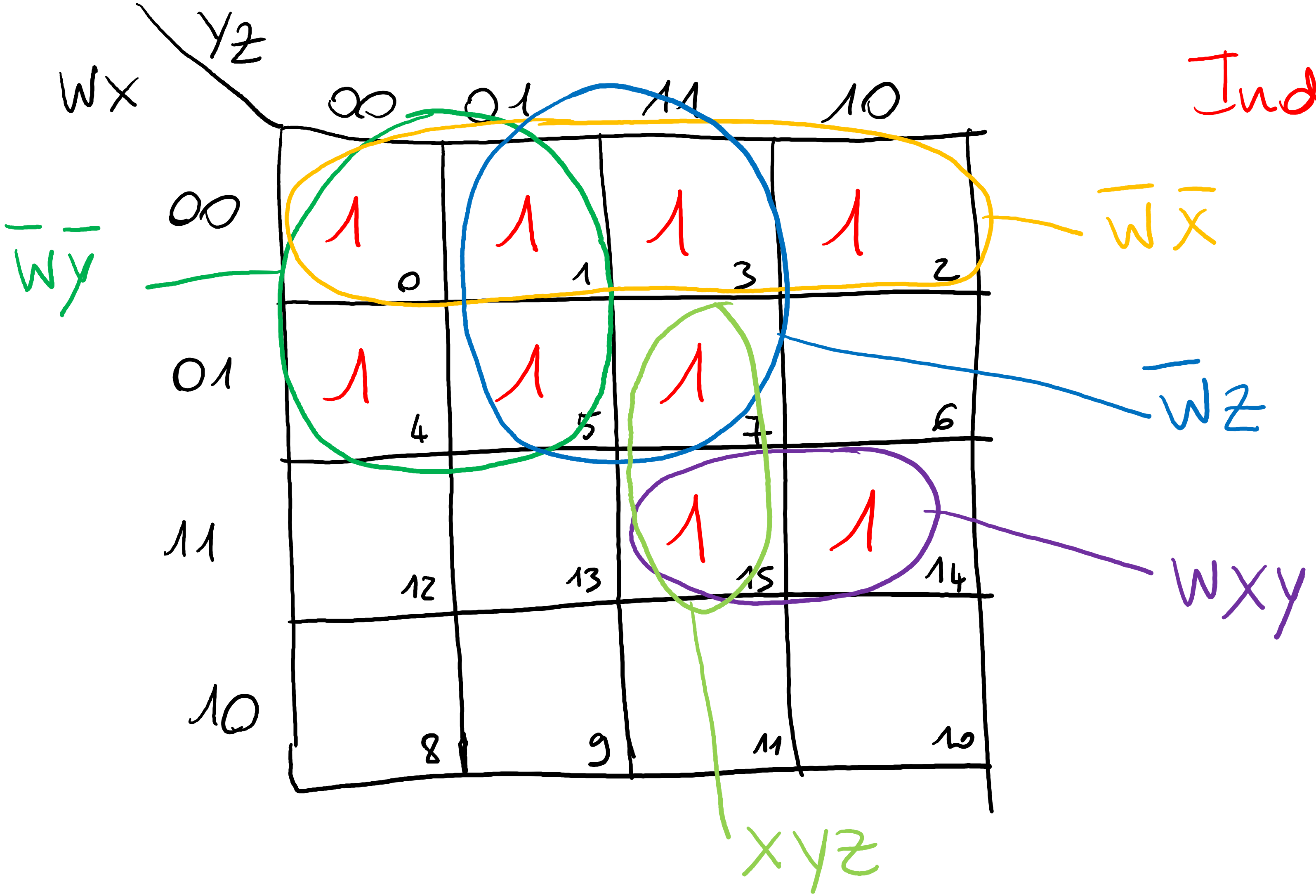
$$G(w, x, y, z) = \sum m(0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 14, 15)$$

wx \ yz	00	01	11	10
00	1 $_{0}$	1 $_{1}$	1 $_{3}$	1 $_{2}$
01	1 $_{4}$	1 $_{5}$	1 $_{7}$	$_{6}$
11	$_{12}$	$_{13}$	1 $_{15}$	1 $_{14}$
10	$_{8}$	$_{9}$	$_{11}$	$_{10}$

Riempiamo la mappa di Karnaugh con "1" in corrispondenza ai mintermini della funzione data

Esercizio 2: Definire la copertura minima SOP a due livelli per la funzione

$$G(w,x,y,z) = \sum m(0,1,2,3,4,5,7,14,15)$$

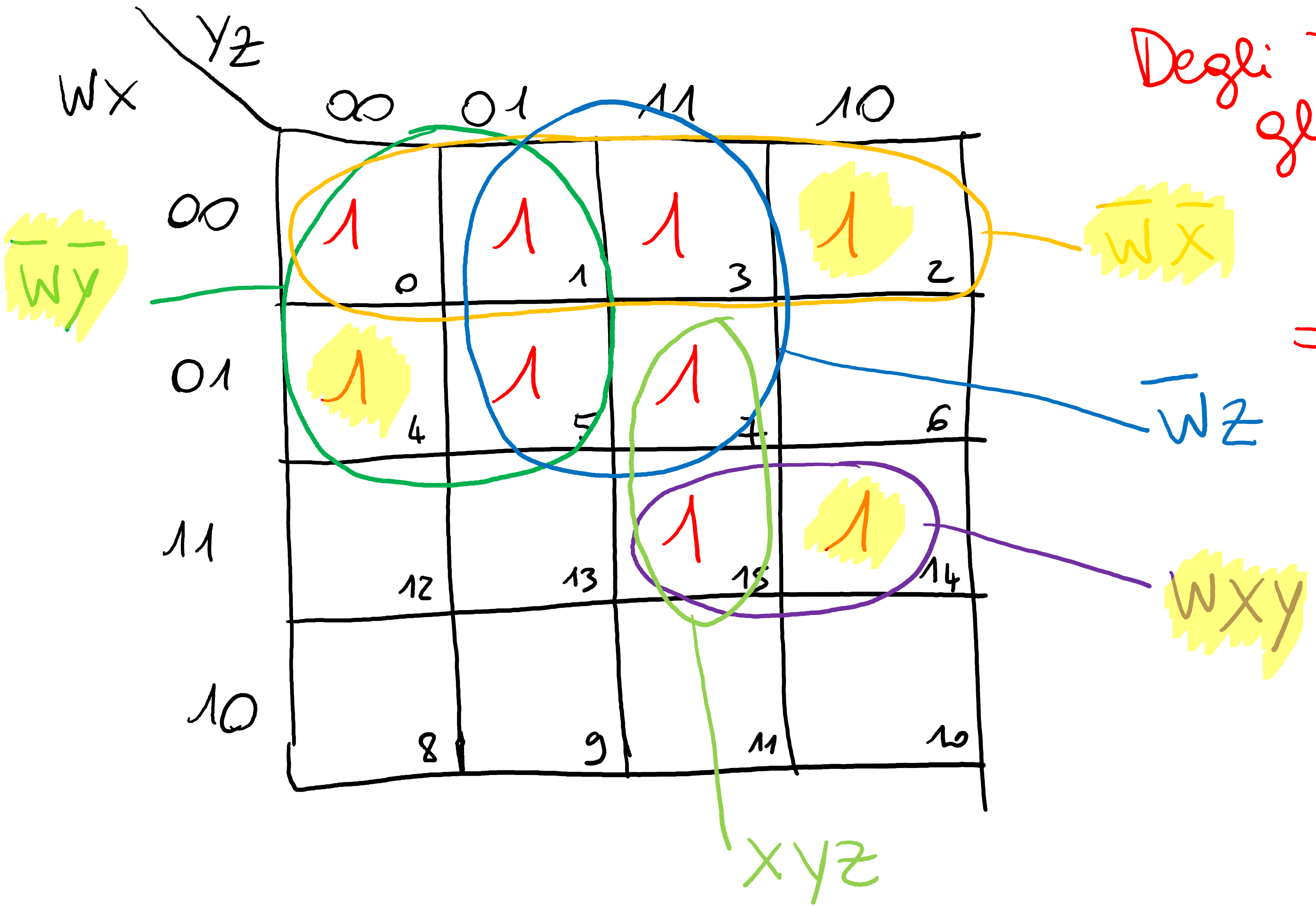


Individuiamo gli IP

$\Rightarrow$ Abbiamo 5 IP

Esercizio 2: Definire la copertura minima SOP a due livelli per la funzione

$$G(w, x, y, z) = \sum m(0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 14, 15)$$

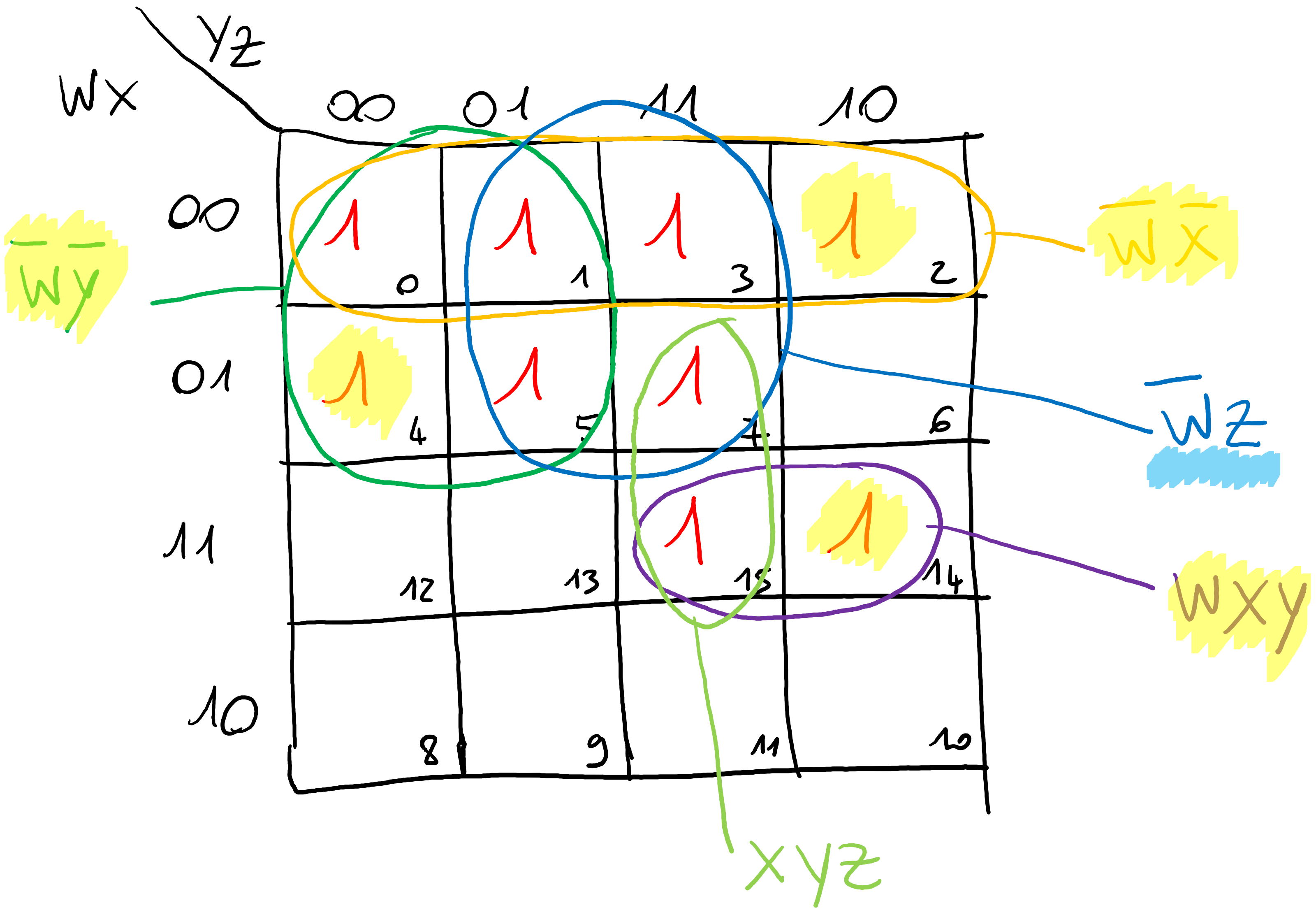


Degli IP trovati, individuiamo gli IPE

$\Rightarrow$ Dei 5 IP, 3 sono IPE.

Esercizio 2: Definire la copertura minima SOP a due livelli per la funzione

$$G(w,x,y,z) = \sum m(0,1,2,3,4,5,7,14,15)$$



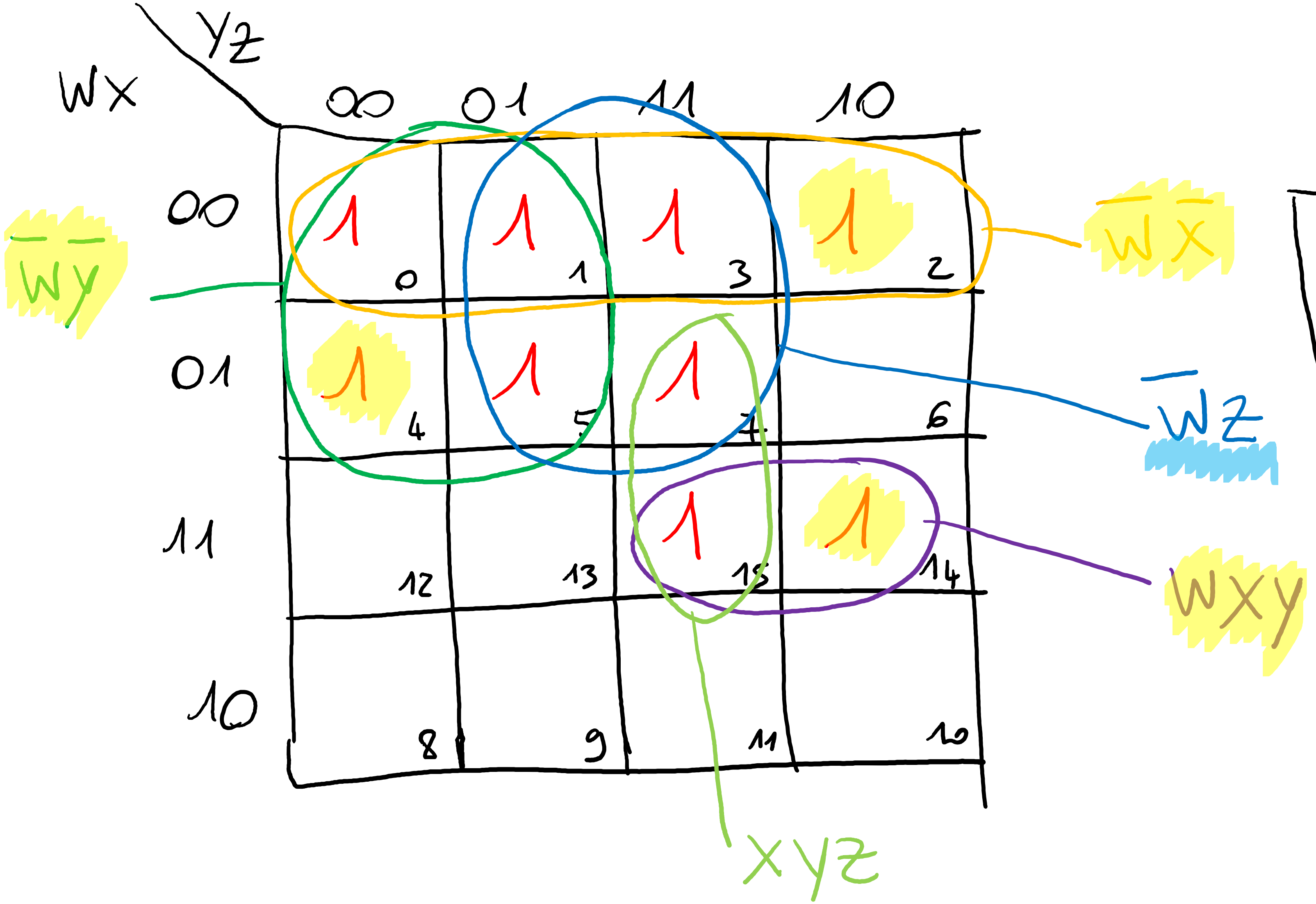
Questi 3 IPE però non bastano a coprire la funzione. Rimane infatti scoperto il minterm m_7!

$\Downarrow$

Scelgo quindi l'IP più grande che contiene m_7, cioè quello blu ($\bar{w}z$)

Esercizio 2: Definire la copertura minima SOP a due livelli per la funzione

$$G(w, x, y, z) = \sum m(0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 14, 15)$$



La forma minima SOP risulta quindi

$$\boxed{G = \bar{w}\bar{y} + \bar{w}\bar{x} + wxy + \bar{w}z}$$

#

Esercizio 3:

1) Dire se la seguente funzione è espressa in forma di SOP minima

$$F(a,b,c,d) = \bar{a}c + \bar{a}b + bd + cd$$

2) Definire la forma minima POS della funzione

Il primo passo consiste nell'individuare i mintermini della funzione. Un primo modo è ricavarne la tabella di verità (più laborioso), un modo più rapido è individuare i mintermini direttamente nella mappa di K., a partire dall'espressione di F(a,b,c,d):

ab \ cd	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

Esercizio 3:

1) Dire se la seguente funzione è espressa in forma di SOP minima

$$F(a,b,c,d) = \bar{a}c + \bar{a}b + bd + cd$$

2) Definire la forma minima POS della funzione

Il primo passo consiste nell'individuare i mintermini della funzione. Un primo modo è ricavarne la tabella di verità (più laborioso), un modo più rapido è individuare i mintermini direttamente nella mappa di K., a partire dall'espressione di F(a,b,c,d):

ab \ cd	00	01	11	10
00	$_{0}$	$_{1}$	1 $_{3}$	1 $_{2}$
01	1 $_{4}$	1 $_{5}$	1 $_{7}$	1 $_{6}$
11	$_{12}$	1 $_{13}$	1 $_{15}$	$_{14}$
10	$_{8}$	$_{9}$	1 $_{11}$	$_{10}$

Esercizio 3:

1) Dire se la seguente funzione è espressa in forma di SOP minima

$$F(a,b,c,d) = \bar{a}c + \bar{a}b + bd + cd$$

2) Definire la forma minima POS della funzione

Abbiamo individuato i 4 implicanti della funzione contenuti nell'espressione data. Questi implicanti sono tutti IPE (ognuno di loro contiene almeno una casella non coperta da altri implicanti:).

1) La forma data è quindi una forma minima perché definita da soli IPE.

ab \ cd	00	01	11	10
00	(0)	(1)	1 (3)	1 (2)
01	1 (4)	1 (5)	1 (7)	1 (6)
11	(12)	1 (13)	1 (15)	(14)
10	(8)	(9)	1 (11)	(10)

Esercizio 3:

1) Dire se la seguente funzione è espressa in forma di SOP minima

$$F(a,b,c,d) = \bar{a}c + \bar{a}b + bd + cd$$

2) Definire la forma minima POS della funzione

Passiamo ora ad individuare i raggruppamenti di "0" adiacenti (1-2-4-8-16 caselle) per definire la forma minima POS:

ab \ cd	00	01	11	10
00	0 $_{0}$	0 $_{1}$	$_{3}$	$_{2}$
01	$_{4}$	$_{5}$	$_{7}$	$_{6}$
11	0 $_{12}$	$_{13}$	$_{15}$	0 $_{14}$
10	0 $_{8}$	0 $_{9}$	$_{11}$	0 $_{10}$

$b+c$

$\bar{a}+d$

⇒ La forma minima POS risulta

$$F = (\bar{a}+d)\cdot(b+c)$$

#

Esercizio 4: Si usino 4 cifre binarie (*dcba*) per rappresentare le cifre da 0 a 9 (codifica BCD). Realizzare la funzione:

$$F(d,c,b,a) = \begin{cases} 1 \text{ se } dcba \text{ è non nullo e divisibile per 3} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

La tabella di verità della funzione è →

Cifre decimale	d	c	b	a	F
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
	1	0	1	0	X
	1	0	1	1	X
	1	1	0	0	X
	1	1	0	1	X
	1	1	1	0	X
	1	1	1	1	X

→ 6 condizioni di don't care!

Esercizio 4: Si usino 4 cifre binarie (*dcba*) per rappresentare le cifre da 0 a 9 (codifica BCD). Realizzare la funzione:

$$F(d,c,b,a) = \begin{cases} 1 \text{ se } dcba \text{ è non nullo e divisibile per 3} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Dalla tabella di verità passiamo alla Mappa di Karnaugh →

dc \ ba	00	01	11	10
00	0 $_{0}$	0 $_{1}$	1 $_{3}$	0 $_{2}$
01	0 $_{4}$	0 $_{5}$	0 $_{7}$	1 $_{6}$
11	X $_{12}$	X $_{13}$	X $_{15}$	X $_{14}$
10	0 $_{8}$	1 $_{9}$	X $_{11}$	X $_{10}$

Esercizio 4: Si usino 4 cifre binarie (*dcba*) per rappresentare le cifre da 0 a 9 (codifica BCD). Realizzare la funzione:

$$F(d,c,b,a) = \begin{cases} 1 \text{ se } dcba \text{ è non nullo e divisibile per 3} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

dc \ ba	00	01	11	10
00	0 (0)	0 (1)	1 (3)	0 (2)
01	0 (4)	0 (5)	0 (7)	1 (6)
11	X (12)	X (13)	X (15)	X (14)
10	0 (8)	1 (9)	X (11)	X (10)

$\bar{c}ba$

$cb\bar{a}$

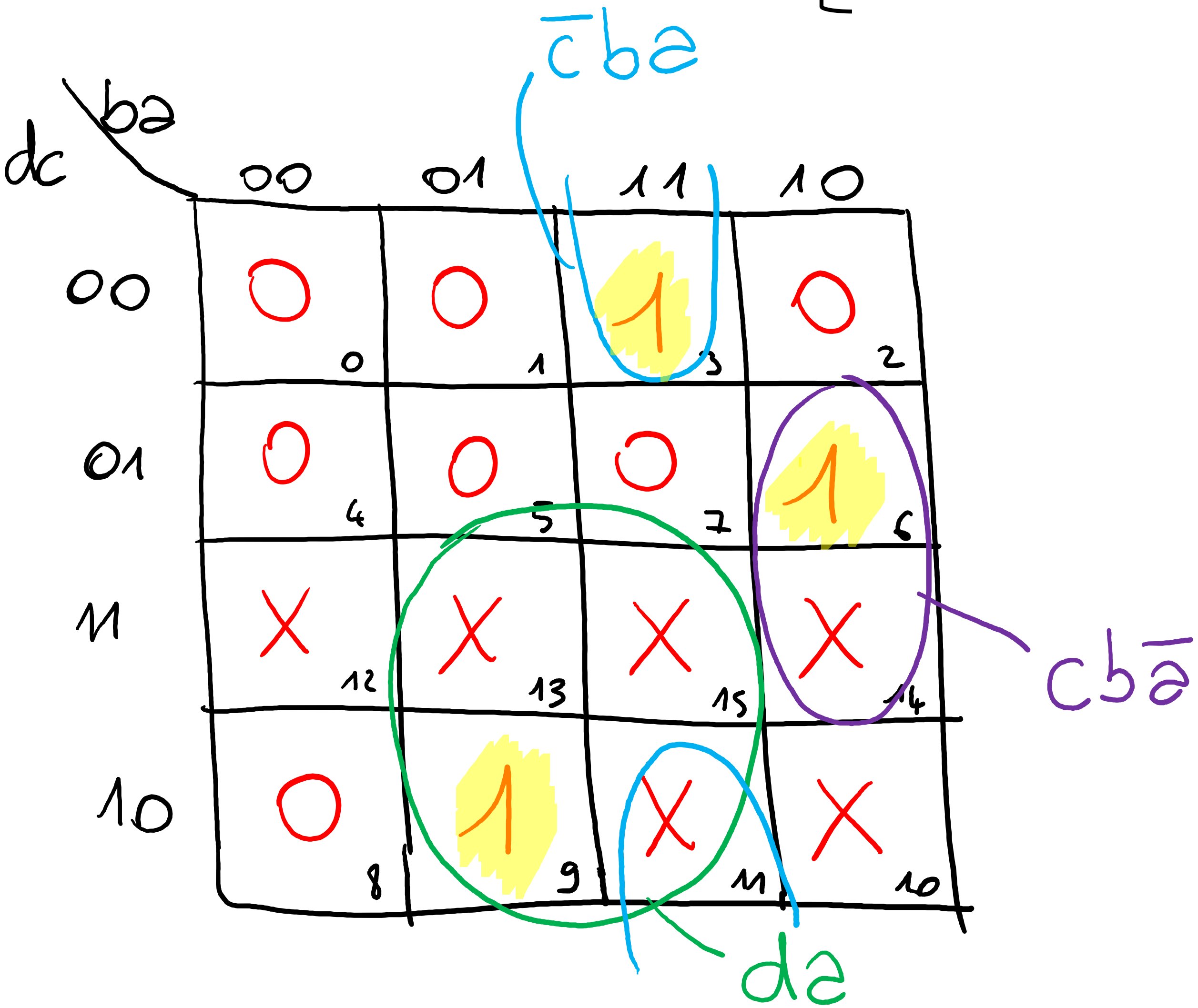
da

Individuiamo ora gli IP, coprendo anche le caselle con X, se ci fa comodo per avere implicanti più grandi

$\Rightarrow$ Abbiamo 3 IP

Esercizio 4: Si usino 4 cifre binarie (*dcba*) per rappresentare le cifre da 0 a 9 (codifica BCD). Realizzare la funzione:

$$F(d,c,b,a) = \begin{cases} 1 \text{ se } dcba \text{ è non nullo e divisibile per 3} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$



Tutti e 3 questi IP sono anche IPE

$\Downarrow$

Copertura minima SoP:

$$F = ad + ab\bar{c} + \bar{a}bc$$

#

Esercizio 5: Trovare la forma minima SOP per la funzione con i seguenti mintermini: m_0, m_1, m_2, m_4, m_5, m_{10}, m_{11}, m_{13}, m_{15}

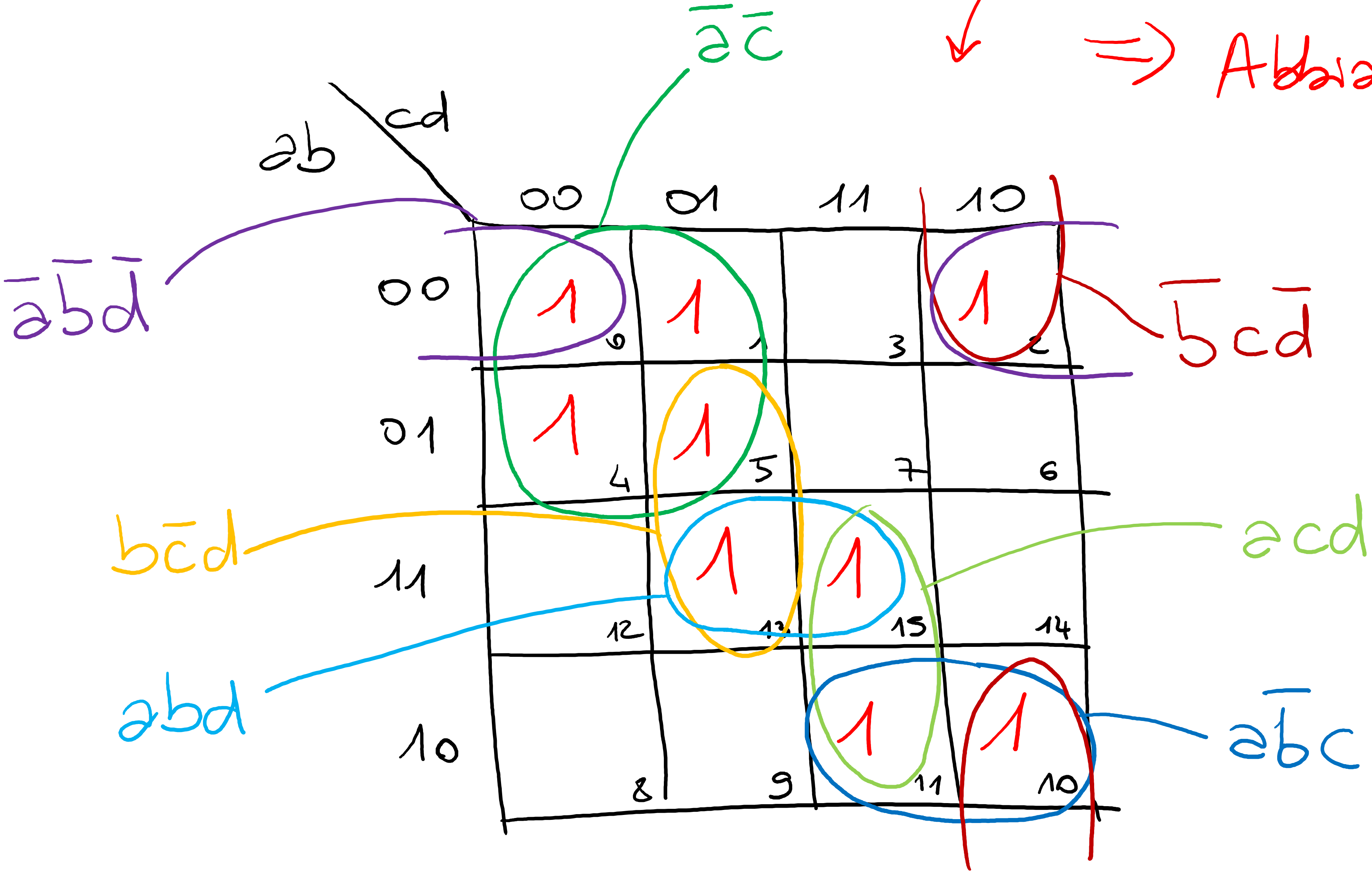
Inseriamo i mintermini nella mappa di Karnaugh come "1":

ab \ cd	00	01	11	10
00	1 (0)	1 (1)	(3)	1 (2)
01	1 (4)	1 (5)	(7)	(6)
11	(12)	1 (13)	1 (15)	(14)
10	(8)	(9)	1 (11)	1 (10)

Esercizio 5: Trovare la forma minima SOP per la funzione con i seguenti mintermini: m_0, m_1, m_2, m_4, m_5, m_{10}, m_{11}, m_{13}, m_{15}

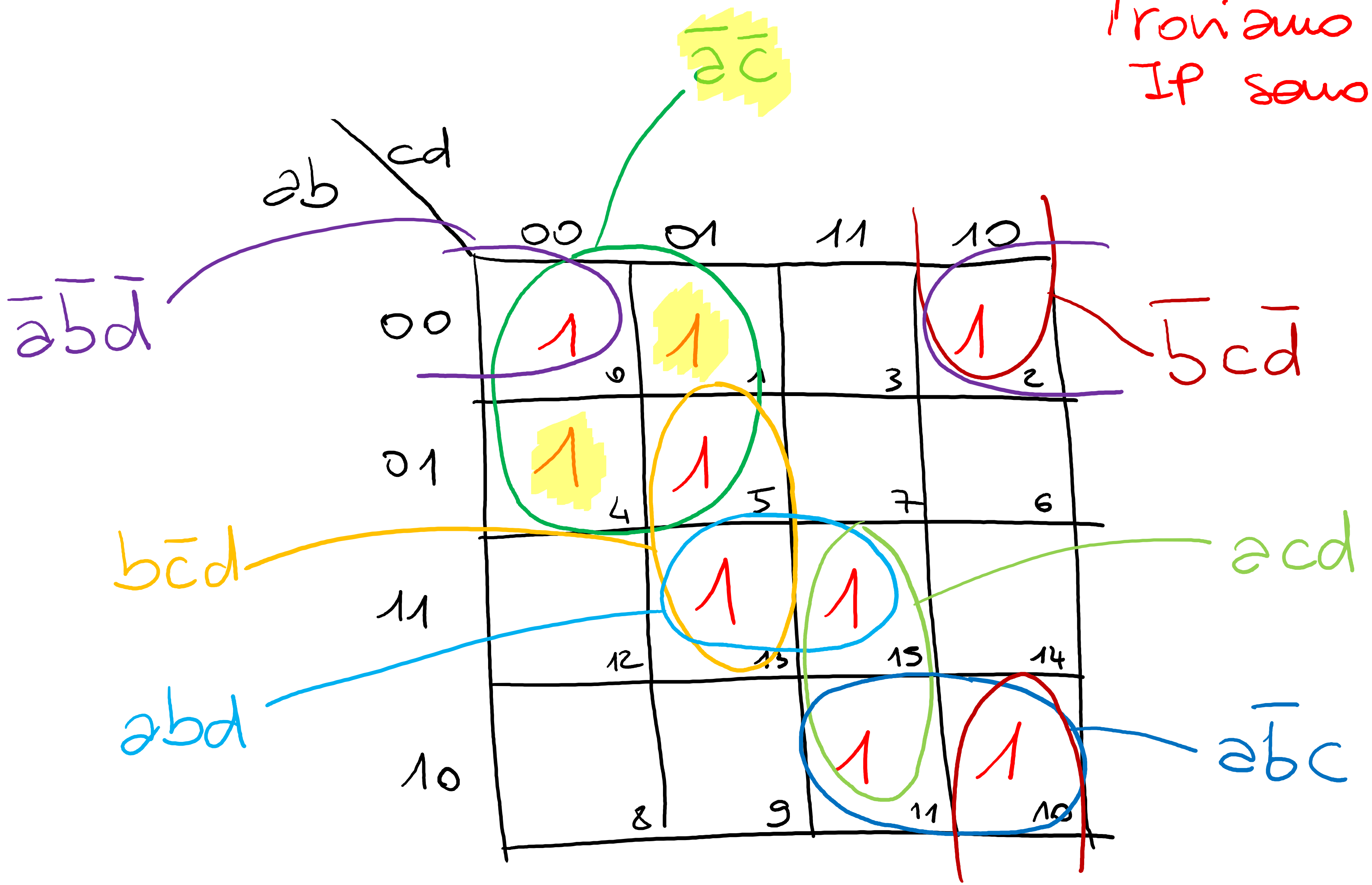
Individuiamo gli IP

$\Rightarrow$ Abbiamo 7 IP



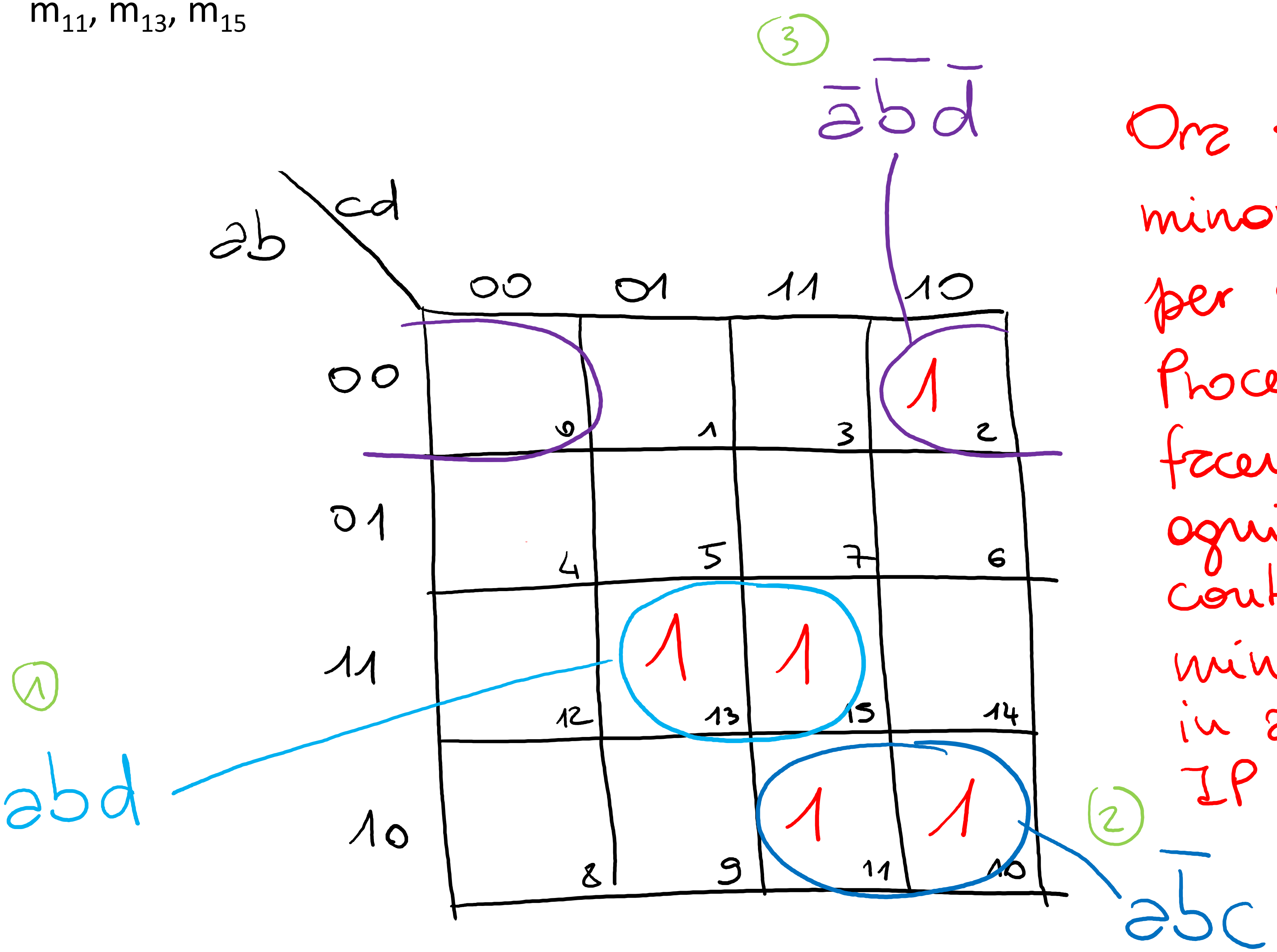
Esercizio 5: Trovare la forma minima SOP per la funzione con i seguenti mintermini: m_0, m_1, m_2, m_4, m_5, m_{10}, m_{11}, m_{13}, m_{15}

Troviamo quali di questi IP sono anche IPE



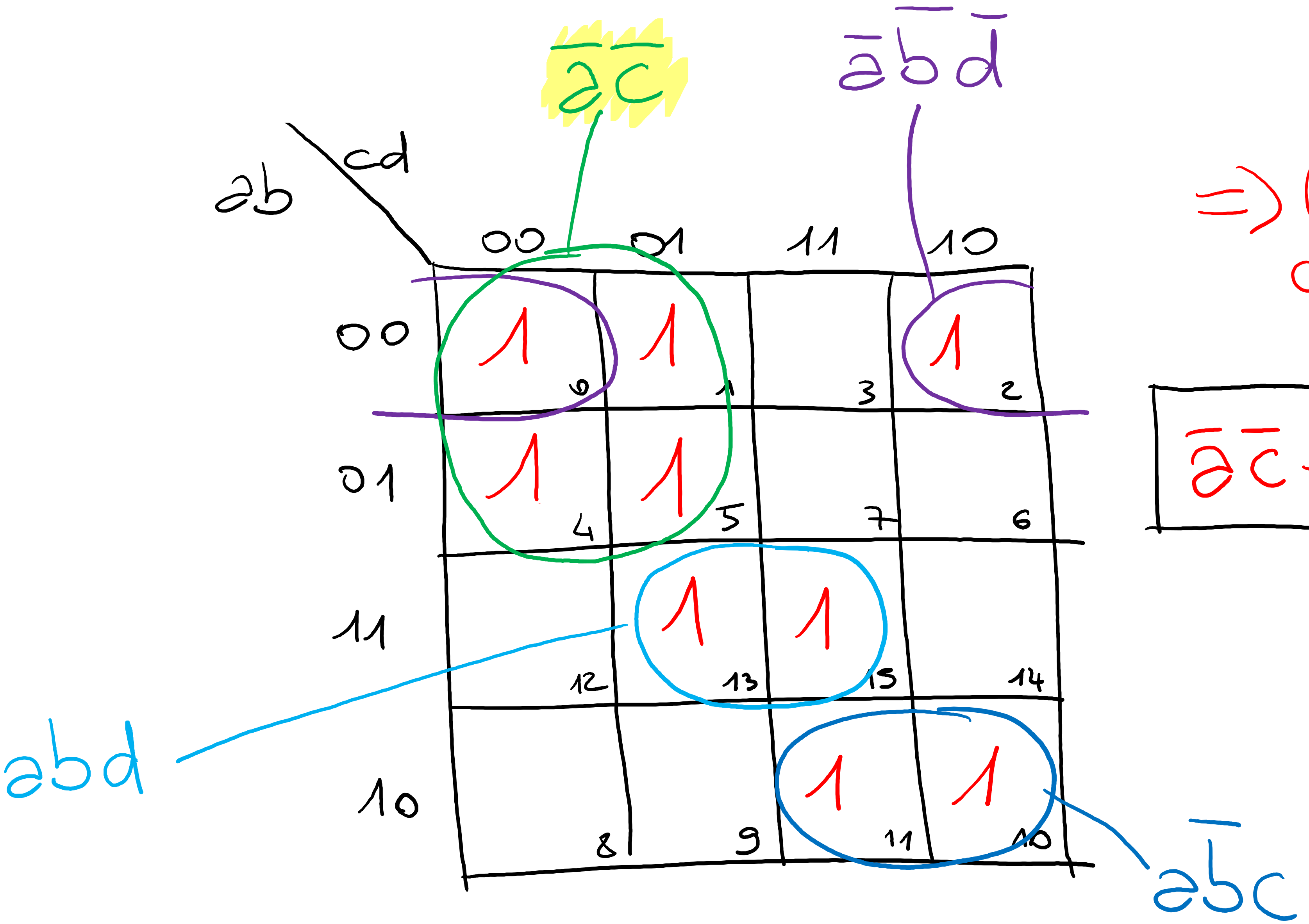
⇒ Uno solo degli IP è IPE (→ servirà di sicuro per la copertura)

Esercizio 5: Trovare la forma minima SOP per la funzione con i seguenti mintermini: m_0, m_1, m_2, m_4, m_5, m_{10}, m_{11}, m_{13}, m_{15}



Ora scegliamo il numero minore possibile di IP per coprire gli "1" rimanenti. Procediamo in ordine e facendo in modo che ogni IP selezionato contenga almeno 1 mintermine non incluso in alcuno degli altri IP selezionati

Esercizio 5: Trovare la forma minima SOP per la funzione con i seguenti mintermini: m_0, m_1, m_2, m_4, m_5, m_{10}, m_{11}, m_{13}, m_{15}



⇒ Una possibile copertura minima è quindi:

$$\boxed{\bar{a}\bar{c} + abd + a\bar{b}c + \bar{a}\bar{b}\bar{d}}$$