DEI
DIPARTIMENTO DI
INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

Sistemi Digitali

Minimizzazione delle funzioni logiche

Marta Bagatin, marta.bagatin@unipd.it

Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione

Anno accademico 2022-2023

Scopo della lezione

- Introdurre alcune definizioni/terminologia che useremo per la minimizzazione delle funzioni logiche
- Esprimere una funzione booleana in **forma canonica**
- Studiare diverse tecniche di **ottimizzazione delle funzioni logiche**
  - Semplificazione attraverso algebra booleana
  - Minimizzazione con Mappe di Karnaugh

Definizioni e forme canoniche

Forme canoniche

- Abbiamo visto che un’espressione logica si può esprimere in diversi modi, equivalenti dal punto di vista algebrico
- Il nostro scopo è esprimere una funzione in modo da facilitare la sua implementazione con circuiti digitali
- Le **forme canoniche** (anche dette forme normali) sono delle rappresentazioni per esprimere funzioni logiche in modo da agevolarne la semplificazione
- La forma canonica di una funzione si deriva dalla tabella di verità. Contiene **termini prodotto** (AND tra 2 o più letterali, es: $X\ Y\ \bar{Z}$) **e termini somma** (OR tra 2 o più letterali, es: $X + Y + \bar{Z}$)

Mintermine

- Definiamo **mintermine** (minterm) un termine **prodotto** (**AND**) che contiene **una e una sola volta tutte le variabili di una funzione, in forma diretta o negata**
- Ogni mintermine rappresenta una <u>riga della tabella di verità</u>
  - vale ‘1’ per la combinazione dei valori delle variabili di quella riga, ‘0’ per tutte le altre combinazioni
  - è costituito dal prodotto delle variabili in ciascuna riga, con la variabile negata se il bit corrispondente a quella variabile è ‘0’, non negata se è ‘1’
- In corrispondenza a n variabili, avremo 2^n mintermini

Mintermini per 3 variabili

Minterms for Three Variables

X	Y	Z	Product Term	Symbol	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7
0	0	0	$\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$	m_0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	$\overline{X}\,\overline{Y}Z$	m_1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	$\overline{X}Y\overline{Z}$	m_2	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	$\overline{X}YZ$	m_3	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	$X\overline{Y}\,\overline{Z}$	m_4	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	$X\overline{Y}Z$	m_5	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	$XY\overline{Z}$	m_6	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	XYZ	m_7	0	0	0	0	0	0	0	1

Maxtermine

- Il maxtermine è il **concetto duale** di mintermine
- Definiamo **maxtermine** (maxterm) un termine **somma** (**OR**) che contiene **una e una sola volta tutte le variabili di una funzione, in forma diretta o negata**
- Ogni maxtermine rappresenta una riga della tabella di verità
  - vale ‘0’ per la combinazione dei valori delle variabili di quella riga, ‘1’ per tutte le altre combinazioni
  - è costituito dalla somma delle variabili in ciascuna riga, con la variabile negata se il bit corrispondente a quella variabile è ‘1’, non negata se è ‘0’
- In corrispondenza a n variabili, avremo 2^n maxtermini

Maxtermini per 3 variabili

Maxterms for Three Variables

X	Y	Z	Sum Term	Symbol	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7
0	0	0	$X + Y + Z$	M_0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	$X + Y + \overline{Z}$	M_1	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	$X + \overline{Y} + Z$	M_2	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	$X + \overline{Y} + \overline{Z}$	M_3	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	$\overline{X} + Y + Z$	M_4	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	$\overline{X} + Y + \overline{Z}$	M_5	1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	$\overline{X} + \overline{Y} + Z$	M_6	1	1	1	1	1	1	0	1
1	1	1	$\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$	M_7	1	1	1	1	1	1	1	0

Mintermini e maxtermini

Minterms for Three Variables

X	Y	Z	Product Term	Symbol
0	0	0	$\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$	m_0
0	0	1	$\overline{X}\,\overline{Y}Z$	m_1
0	1	0	$\overline{X}Y\overline{Z}$	m_2
0	1	1	$\overline{X}YZ$	m_3
1	0	0	$X\overline{Y}\,\overline{Z}$	m_4
1	0	1	$X\overline{Y}Z$	m_5
1	1	0	$XY\overline{Z}$	m_6
1	1	1	XYZ	m_7

Maxterms for Three Variables

X	Y	Z	Sum Term	Symbol
0	0	0	$X + Y + Z$	M_0
0	0	1	$X + Y + \overline{Z}$	M_1
0	1	0	$X + \overline{Y} + Z$	M_2
0	1	1	$X + \overline{Y} + \overline{Z}$	M_3
1	0	0	$\overline{X} + Y + Z$	M_4
1	0	1	$\overline{X} + Y + \overline{Z}$	M_5
1	1	0	$\overline{X} + \overline{Y} + Z$	M_6
1	1	1	$\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$	M_7

Il mintermine e il maxtermine con lo **stesso indice** sono l'uno il **complemento** dell'altro

Esempio: $M_3 = X + \bar{Y} + \bar{Z} = \overline{\bar{X}\;Y\;Z} = \overline{m_3}$

Mintermini e maxtermini di una funzione

- I **mintermini di una funzione** sono i mintermini in corrispondenza a cui la **funzione vale ‘1’**
- I **maxtermini di una funzione** sono i maxtermini in corrispondenza a cui la **funzione vale ‘0’**

Forme canoniche

- Possiamo rappresentare tutte le funzioni booleane in **forma canonica** a partire dalla loro tabella di verità
- Esistono due tipi di forme canoniche

1) **Forma canonica SOP** (Sum Of Products): **somma di tutti i mintermini della funzione** [somma (OR) di prodotti (AND)]

   oppure

2) **Forma canonica POS** (Product Of Sums): **prodotto di tutti i maxtermini della funzione** [prodotto (AND) di somme (OR)]

- Tipicamente le forme canoniche sono ridondanti e possono essere semplificate. Partiremo da queste forme per la minimizzazione delle funzioni logiche

Es: Funzione booleana a 3 variabili

X	Y	Z	F	$\overline{F}$
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	1	0

- Possiamo esprimere la funzione F come **somma di mintermini**:

$$F = \bar{X}\bar{Y}\bar{Z} + \bar{X}Y\bar{Z} + X\bar{Y}Z + XYZ = m_0 + m_2 + m_5 + m_7$$

$$F = \sum m(0, 2, 5, 7)$$

Es: Funzione booleana a 3 variabili

X	Y	Z	F	$\overline{F}$
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	1	0

- Oppure, in alternativa, come **prodotto di maxtermini**:

$$F = (X + Y + \bar{Z}) \cdot (X + \bar{Y} + \bar{Z}) \cdot (\bar{X} + Y + Z) \cdot (\bar{X} + \bar{Y} + Z)$$

$$F = M_1 \cdot M_3 \cdot M_4 \cdot M_6 = \prod M(1,3,4,6)$$

Es: Funzione booleana a 3 variabili

X	Y	Z	F	$\overline{F}$
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	1	0

NB: Gli indici dei maxtermini usati nella rappresentazione canonica POS sono sempre gli stessi dei mintermini usati nella SOP della funzione complementare:

$$F(X,Y,Z) = \prod M(1,3,4,6) \qquad \bar{F}(X,Y,Z) = \sum m(1,3,4,6)$$

Esempio: conversione in forma canonica

Convertire la seguente funzione in forma canonica:

$$E(X,Y,Z) = \bar{Y} + \bar{X}\bar{Z}$$

L'espressione data non è in forma canonica SOP (infatti non tutti i termini contengono tutte e tre le variabili X, Y, Z)

Esempio: conversione in forma canonica

Convertire la seguente funzione in forma canonica:

$$E(X,Y,Z) = \bar{Y} + \bar{X}\bar{Z}$$

L'espressione data non è in forma canonica SOP (infatti non tutti i termini contengono tutte e tre le variabili X, Y, Z)

X	Y	Z	E
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Forma canonica SOP:

$$E(X,Y,Z) = \sum m(0,1,2,4,5)$$

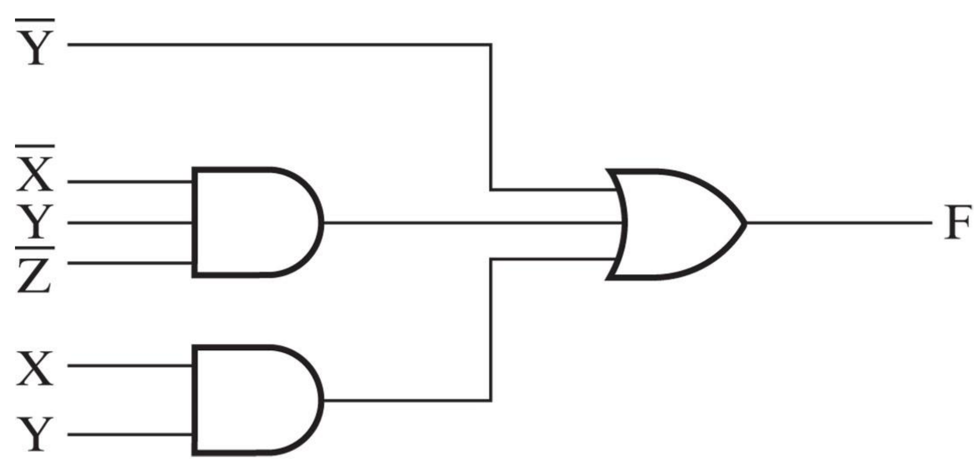
Forma canonica POS:

$$E(X,Y,Z) = \prod M(3,6,7)$$

SOP semplificata

- E' **più compatta rispetto alla rappresentazione canonica**: non tutti i termini prodotto contengono tutti i letterali!
- Può essere ottenuta dalla rappresentazione canonica, semplificandola con le regole dell'algebra di Boole per ridurre il numero di termini prodotto e il numero di letterali nei termini
  - Esempio di rappresentazione in forma di SOP semplificata

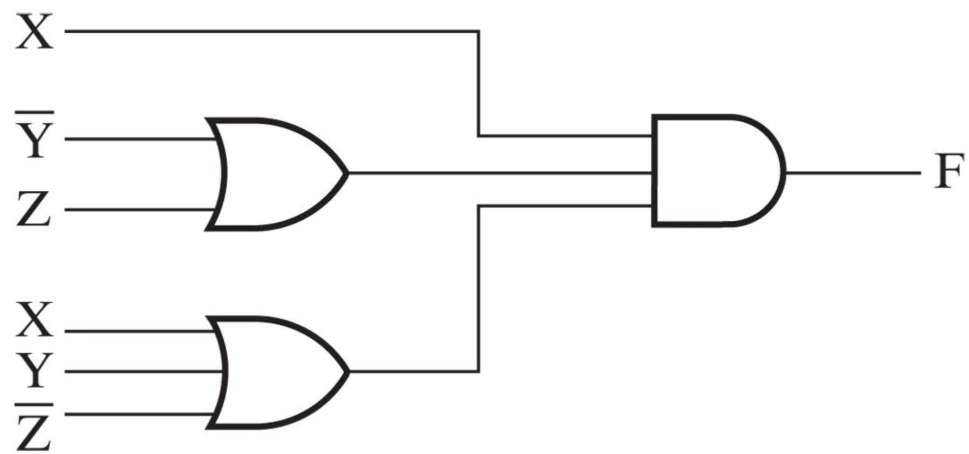
$$F = \bar{Y} + \bar{X}Y\bar{Z} + XY$$



POS semplificata

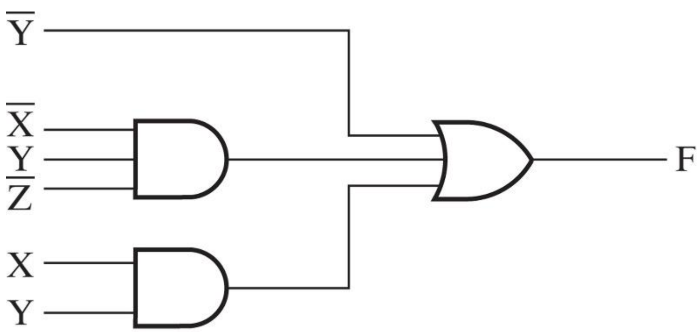
- Duale rispetto alla rappresentazione in forma di somma di prodotti: in questo caso, non tutti i termini somma contengono tutti i letterali
  - Esempio di rappresentazione in forma di POS

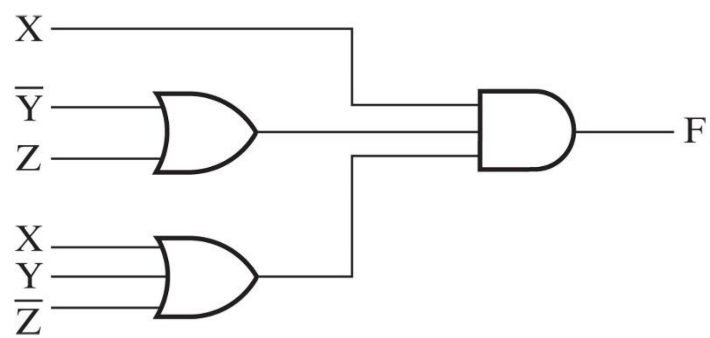
$$F = X(\bar{Y} + Z)(X + Y + \bar{Z})$$



Livelli di implementazione

- Espressioni logiche in **forma di SOP o di POS** possono essere **implementate con circuiti a due livelli**



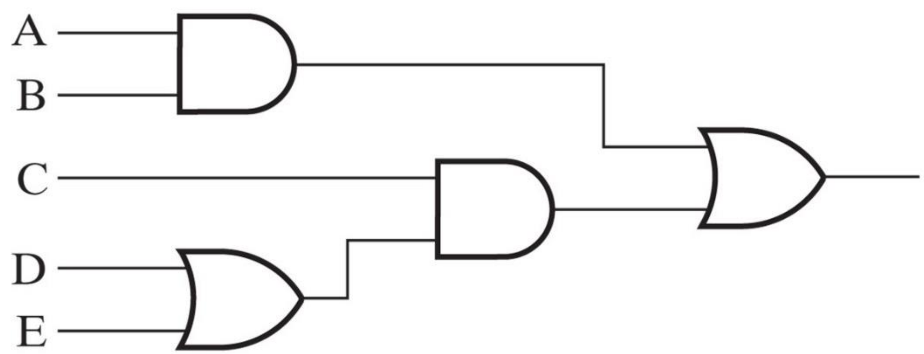


→ **Implementazioni con porte logiche a due livelli**

- Viceversa, espressioni che non sono né in forma di prodotto di somme, né in forma di somma di prodotti devono essere implementate in circuiti logici a più livelli

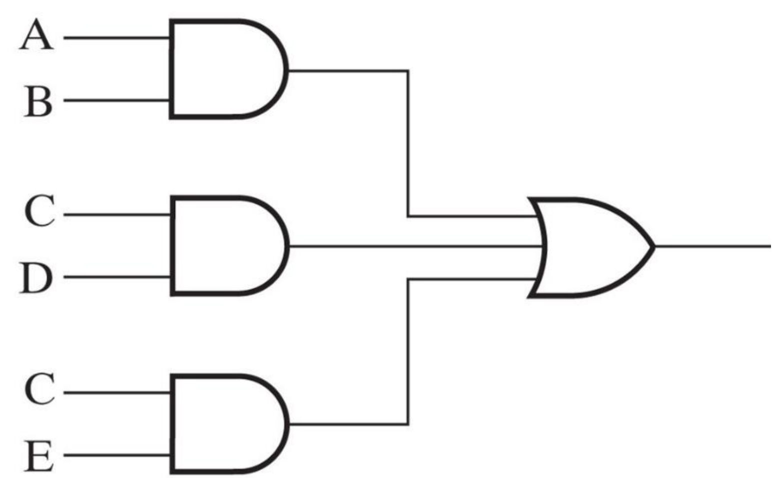
Esempio: implementazione a più livelli

- Un’espressione logica non in forma di somma di prodotti corrisponde ad un’implementazione a 3 livelli:



$$F = AB + C(D + E)$$

- Applicando la proprietà distributiva si ottiene una SOP che corrisponde ad un’implementazione a 2 livelli: $F = AB + CD + CE$



Ottimizzazione dei circuiti a due livelli

Criteri di costo

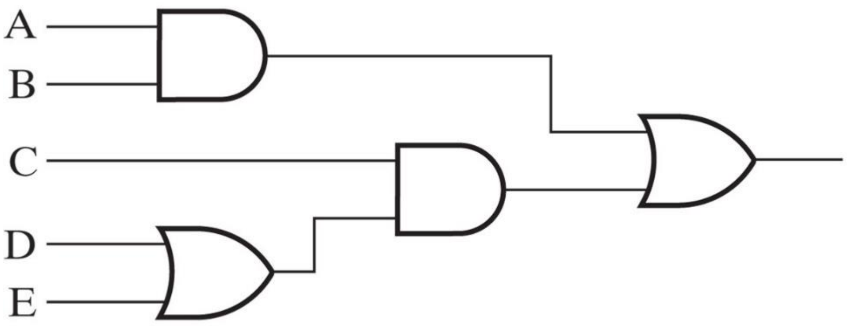
- Per **ottimizzare** il circuito che implementa una funzione booleana si possono usare due criteri alternativi
  - **Minimizzare il numero di letterali**
    - Si valuta dall'espressione booleana, contando quante volte appaiono i letterali
    - Non sempre rappresenta in modo accurato la complessità del circuito corrispondente
  - **Minimizzare il numero di ingressi** delle porte
    - Si valuta dal diagramma logico contando il numero degli ingressi di tutte le porte. In modo meno diretto si può calcolare anche dall'espressione booleana
    - Modo più accurato di valutare il costo di un circuito moderno (con più di due livelli), essendo proporzionale al numero di transistor e connessioni
- La forma con costo minore **non è necessariamente unica!**

Esempio 1: criteri di costo

Date due espressioni della funzione F, trovare quella con il costo minore:

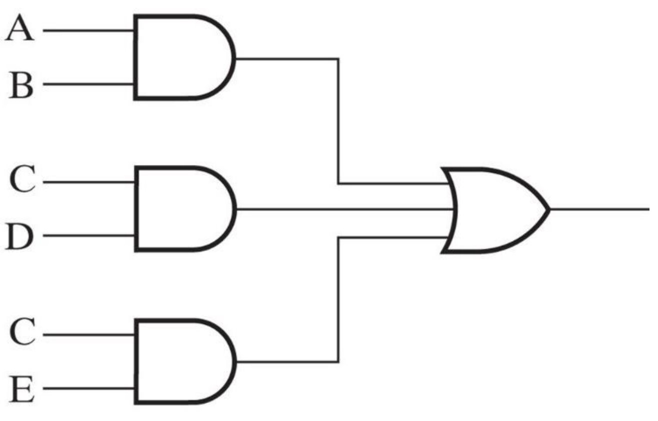
1) $\boldsymbol{F = AB + C(D+E)}$

5 letterali, 8 ingressi ←



2) $\boldsymbol{F = AB + CD + CE}$

6 letterali, 9 ingressi ←



La prima espressione minimizza sia il numero di letterali che il numero di ingressi delle porte!

Esempio 2: criteri di costo

Trovare l'espressione con il costo minore:

$\mathbf{1)}\quad \boldsymbol{G = ABCD + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}}$ → 8 letterali, 10 ingressi

$\mathbf{2)}\quad \boldsymbol{G = (\overline{A} + B)(\overline{B} + C)(\overline{C} + D)(\overline{D} + A)}$ → 8 letterali, 12 ingressi

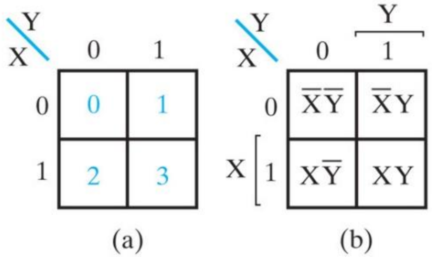
Le due espressioni hanno lo stesso numero di letterali, ma la prima minimizza il numero di ingressi!

Mappe di Karnaugh

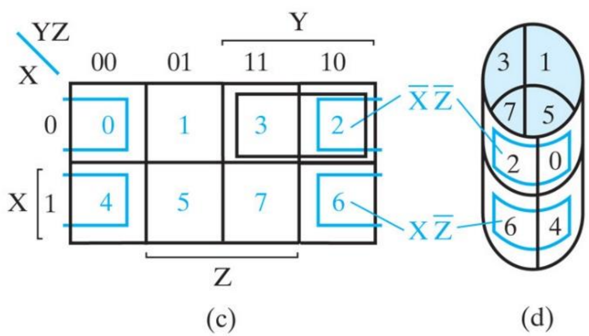
Metodi di semplificazione

- Semplificare un’espressione algebricamente può essere il modo più diretto per ottimizzare una funzione, ma non esiste un algoritmo per arrivare alla forma più semplice
- La **mappa di Karnaugh** offre un **metodo per costruire la forma minima di una funzione booleana** come somma di prodotti o come prodotto di somme
- Si tratta di un metodo grafico che sfrutta il criterio geometrico di distanza di Hamming
- E’ efficace per funzioni booleane fino a 4 variabili
- Metodi con principi analoghi sono usati dai tool automatici per la sintesi di funzioni logiche combinatorie

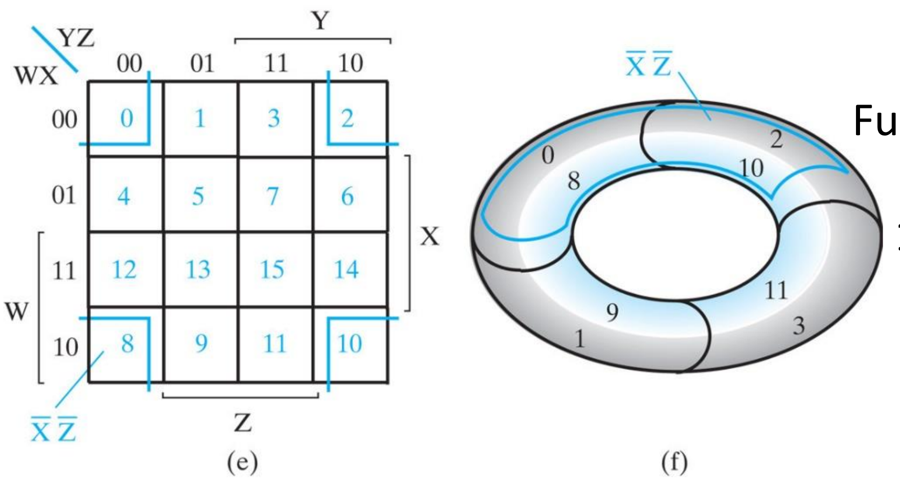
Mappe di Karnaugh



Funzioni a 2 variabili: 4 caselle



Funzioni a 3 variabili: 8 caselle (cilindro)



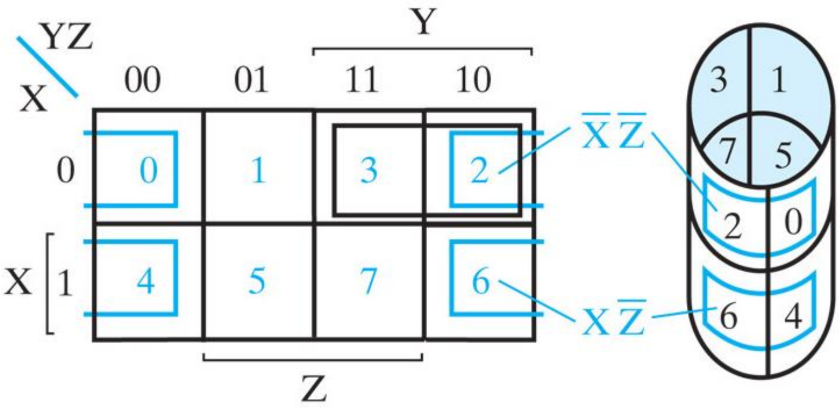
Funzioni a 4 variabili: 16 caselle (toroide)

- **Ogni casella** rappresenta una riga della tabella di verità della funzione, cioè un **mintermine**
- Caselle **adiacenti differiscono di un solo letterale** (codice Gray), cioè hanno distanza di Hamming pari a 1
- La mappa va immaginata richiusa su se stessa: le caselle sul bordo superiore sono adiacenti a quelle sul bordo inferiore, idem per destra e sinistra

Mappe di Karnaugh

- Una funzione può essere espressa come somma di mintermini, quindi possiamo rappresentarla graficamente nella mappa mettendo un ‘1’ nelle caselle per cui la funzione vale 1 (i.e. caselle corrispondenti ai mintermini della funzione)
- La mappa presenta un **diagramma visivo di tutte le possibili forme SOP** con cui una funzione può essere espressa
- In particolare, la mappa ci serve per trovare la **SOP minima**
- Dualmente, se consideriamo gli ‘0’ nella mappa, troveremo il **POS minimo**

Mappe di Karnaugh



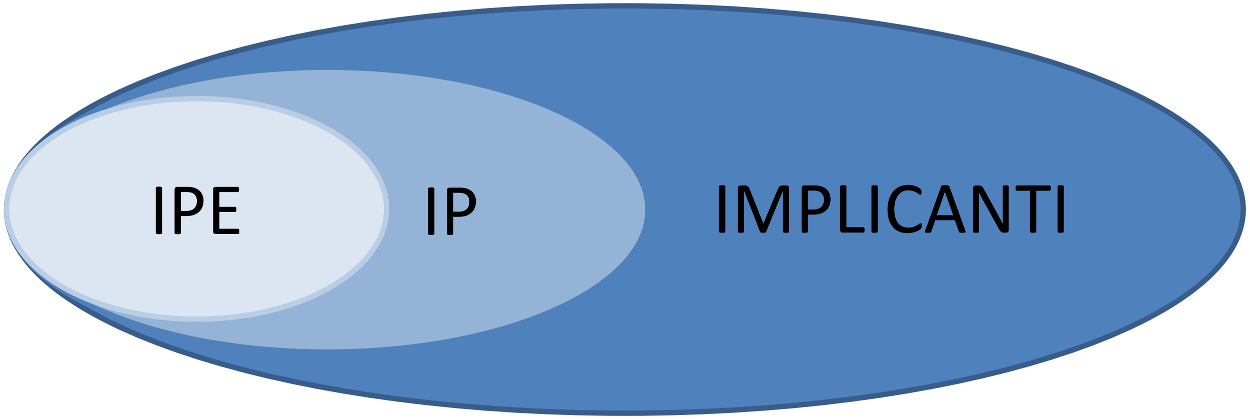
Le combinazioni (X,Y,Z) = 011 e 010 sono adiacenti (differiscono per la sola Z) → i due quadrati corrisponenti ai mintermini m_3 e m_2 sulla mappa condividono un lato

- Nel caso entrambi i minterm m_3 e m_2 appartengano alla funzione, si può considerare un unico raggruppamento per rappresentare i due minterm nella SOP della funzione
- Questo corrisponde alla semplificazione algebrica dei termini prodotto:

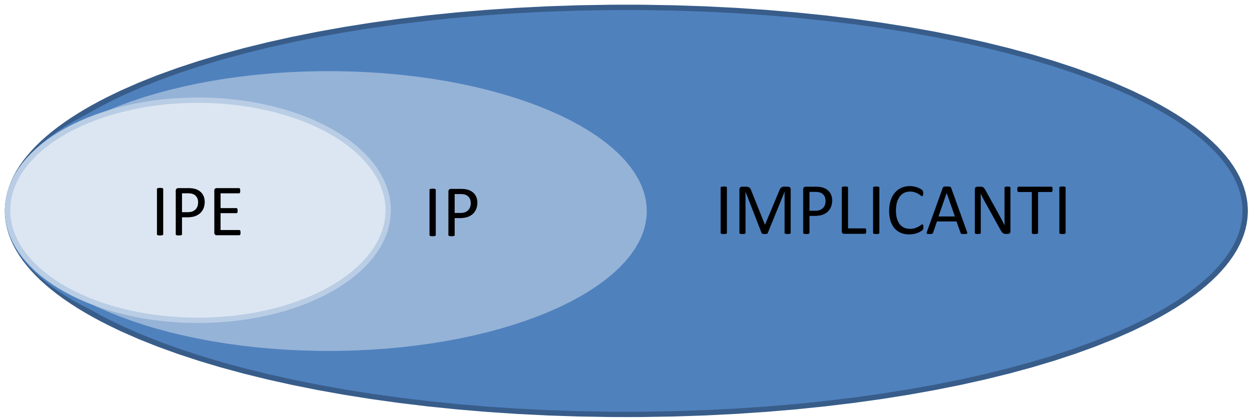
$$\bar{X}YZ + \bar{X}Y\bar{Z} = \bar{X}Y(Z + \bar{Z}) = \bar{X}Y$$

Implicanti

- **Implicante**: termine prodotto per cui la funzione vale ‘1’
- **Implicante primo (IP)**: implicante che **non è contenuto** in alcun altro implicante (non può essere reso più grande)
- **Implicante primo essenziale (IPE)**: implicante che contiene almeno un mintermine della funzione non coperto da altri implicanti primi (i.e. un IPE è l’unico implicante primo che contiene uno o più mintermini)



Copertura di una funzione

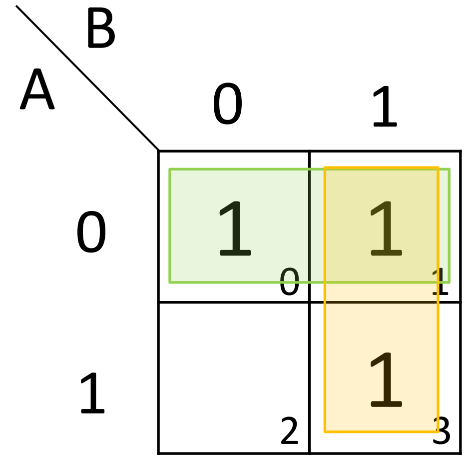


- **Copertura di una funzione**: contiene almeno tutti gli IPE (ed eventualmente altri IP)
- **Il nostro scopo è trovare la copertura minima della funzione**, che si ottiene prendendo opportunamente i raggruppamenti massimi di 1 della mappa. La copertura minima esprime l'uscita con il minor numero di termini, quindi richiede il numero minore di porte logiche

Funzioni a 2 variabili

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

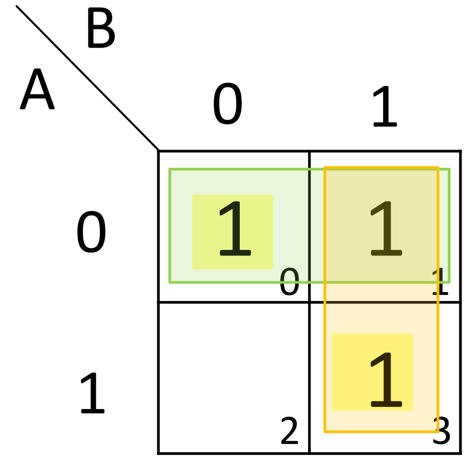
$$m_0 = \bar{A} \cdot \bar{B}$$
$$m_1 = \bar{A} \cdot B$$
$$m_2 = A \cdot \bar{B}$$
$$m_3 = A \cdot B$$



1) Riempire la mappa con gli ‘1’, seguendo la tabella di verità (o la definizione della funzione data dai mintermini)
2) Individuare i più grandi ‘rettangoli’ (raggruppamenti di 1-2-4 caselle) costituiti da ‘1’ adiacenti (IP). Lo scopo è trovare il minimo numero di rettangoli che includono le caselle con ‘1’

Funzioni a 2 variabili

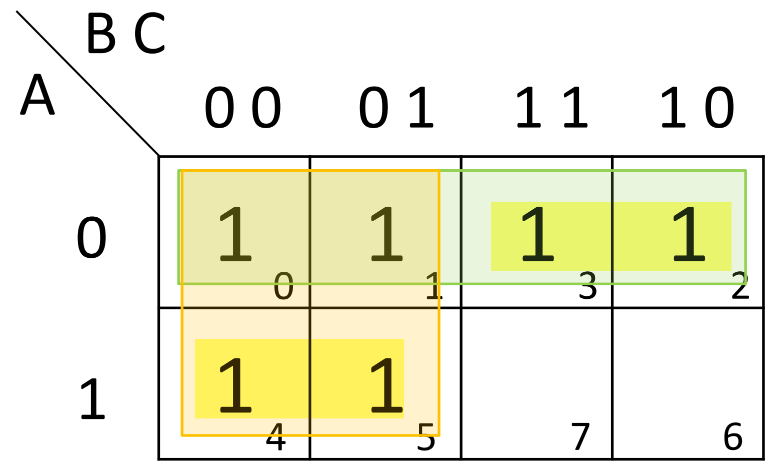
A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



3) Trovare gli IPE (individuando i mintermini coperti da 1 solo implicante)
4) Determinare la copertura minima della funzione: in questo caso bastano gli IPE, dato che tutti gli IP sono anche IPE

$$F = \bar{A} + B$$

Funzioni a 3 variabili



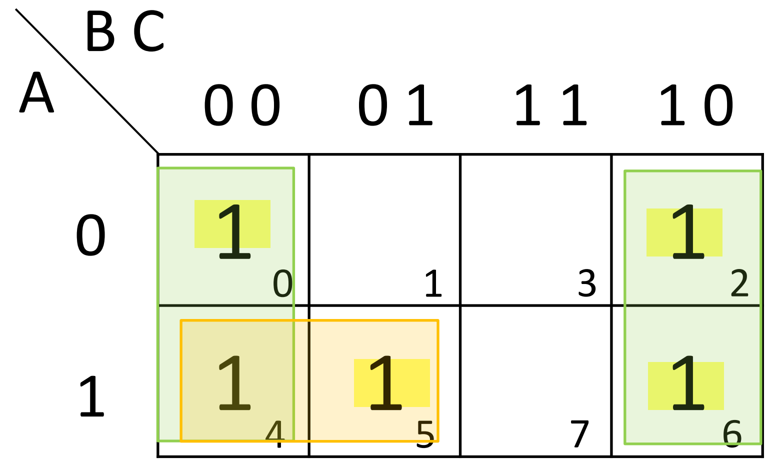
Esempio 1

$$F(A,B,C) = \sum m(0,1,2,3,4,5)$$

1) Riempire la mappa con gli ‘1’ seguendo la definizione dei mintermini
2) Individuare i più grandi rettangoli di ‘1’ adiacenti (IP), da 1-2-4-8 caselle
3) Trovare gli IPE (individuando i minterm coperti da 1 solo implicante)
4) Determinare la copertura minima della funzione (bastano gli IPE in questo caso)

$$F = \bar{A} + \bar{B}$$

Funzioni a 3 variabili



<u>Esempio 2</u>

$$G(A,B,C) = \sum m(0,2,4,5,6)$$

- Ci sono 2 implicanti primi
- Entrambi gli IP sono essenziali

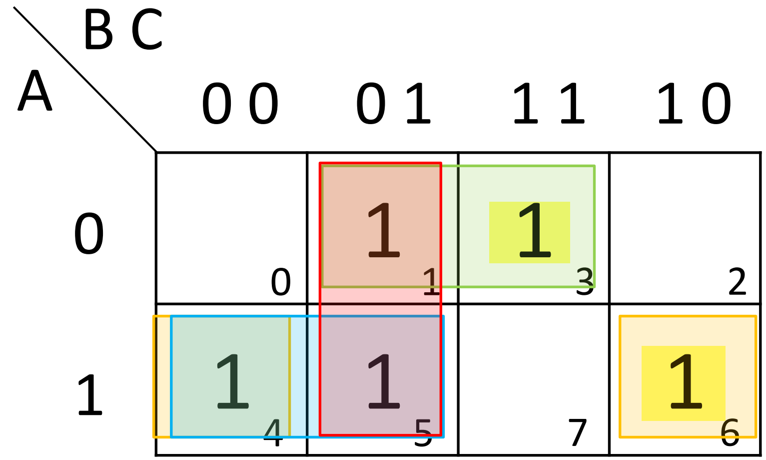
=> La forma minima della funzione risulta quindi:

$$G(A,B,C) = \mathrm{A}\bar{B} + \bar{C}$$

Funzioni a 3 variabili

<u>Esempio 3</u>

$$H(A,B,C) = \sum m(1,3,4,5,6)$$



- Ci sono 4 implicanti primi
- Di questi 4 IP, 2 sono implicanti primi essenziali
- Quale altro implicante scegliere oltre ai 2 IPE?

Funzioni a 3 variabili

<u>Esempio 3</u>

$$H(A,B,C) = \sum m(1,3,4,5,6)$$

A \ B C	0 0	0 1	1 1	1 0
0	0	1	3	2
1	4	1 5	7	6

- Rimane fuori m_5, che può essere coperto da (4,5) oppure da (1,5)

=> Due possibili forme minime equivalenti:

$$H(A,B,C) = \bar{A}C + A\bar{C} + A\bar{B}$$ -> se scegliamo (4,5)

$$H(A,B,C) = \bar{A}C + A\bar{C} + \bar{B}C$$ -> se scegliamo (1,5)

Funzioni a 4 variabili

<u>Esempio 1</u>: semplificare la seguente funzione tramite MdK

$$F(A, B, C, D) =$$
$$= \sum m(0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13)$$

AB \ CD	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	1_{0}	1_{1}	$_{3}$	1_{2}
0 1	1_{4}	1_{5}	$_{7}$	1_{6}
1 1	1_{12}	1_{13}	$_{15}$	$_{14}$
1 0	1_{8}	1_{9}	$_{11}$	1_{10}

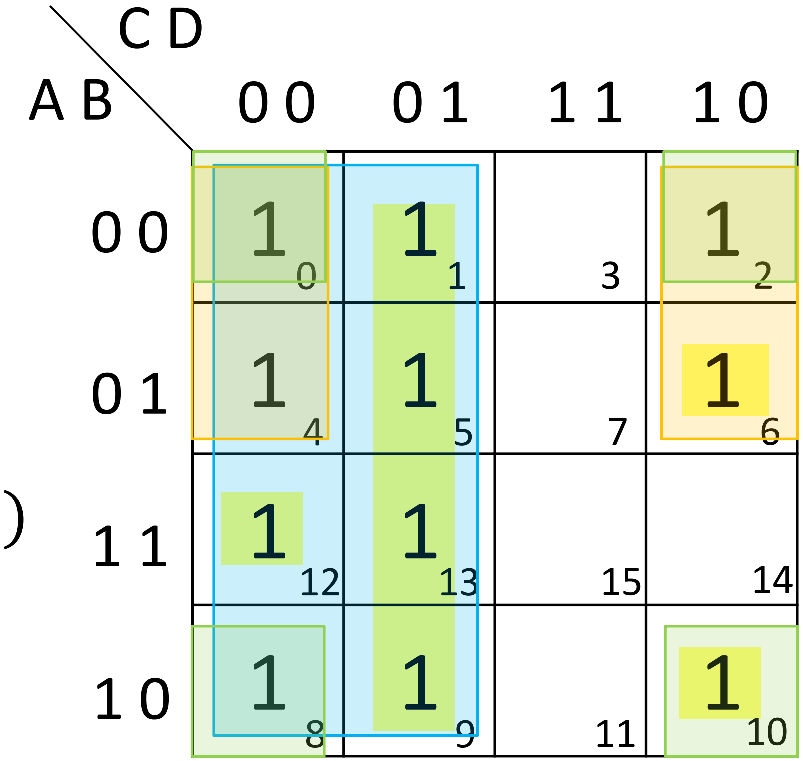
1) Riempire la mappa con gli ‘1’ seguendo la definizione dei mintermini
2) Individuare i più grandi rettangoli di ‘1’ adiacenti (IP), da 1-2-4-8-16 caselle

Funzioni a 4 variabili

<u>Esempio 1</u>: semplificare la seguente funzione tramite MdK

$$F(A,B,C,D) =$$

$$= \sum m(0,1,2,4,5,6,8,9,10,12,13)$$



- Ci sono 3 implicanti primi
- Tutti e 3 gli IP sono anche IPE

=> La forma minima risulta quindi:

$$F(A,B,C,D) = \bar{C} + \bar{A}\bar{D} + \bar{B}\bar{D}$$

Funzioni a 4 variabili

<u>Esempio 2</u>: semplificare la seguente funzione tramite MdK

$$G(A,B,C,D) = \bar{A}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}D + \bar{B}C + CD + A\bar{B}\bar{D}$$

Individuiamo gli implicanti sulla mappa e li riempiamo con ‘1’:

AB \ CD	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	0	1	3	2
0 1	4	5	7	6
1 1	12	13	15	14
1 0	8	9	11	10

Funzioni a 4 variabili

<u>Esempio 2</u>: semplificare la seguente funzione tramite MdK

$$G(A,B,C,D) = \underline{\bar{A}\bar{C}\bar{D}} + \underline{\bar{A}D} + \underline{\bar{B}C} + \underline{CD} + \underline{A\bar{B}\bar{D}}$$

Individuiamo gli implicanti sulla mappa e li riempiamo con ‘1’:

AB \ CD	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	1 $_{0}$	1 $_{1}$	1 $_{3}$	1 $_{2}$
0 1	1 $_{4}$	1 $_{5}$	1 $_{7}$	$_{6}$
1 1	$_{12}$	$_{13}$	1 $_{15}$	$_{14}$
1 0	1 $_{8}$	$_{9}$	1 $_{11}$	1 $_{10}$

Funzioni a 4 variabili

Ora, dalla mappa di Karnaugh, procediamo con la semplificazione:

AB \ CD	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	1 (0)	1 (1)	1 (3)	1 (2)
0 1	1 (4)	1 (5)	1 (7)	(6)
1 1	(12)	(13)	1 (15)	(14)
1 0	1 (8)	(9)	1 (11)	1 (10)

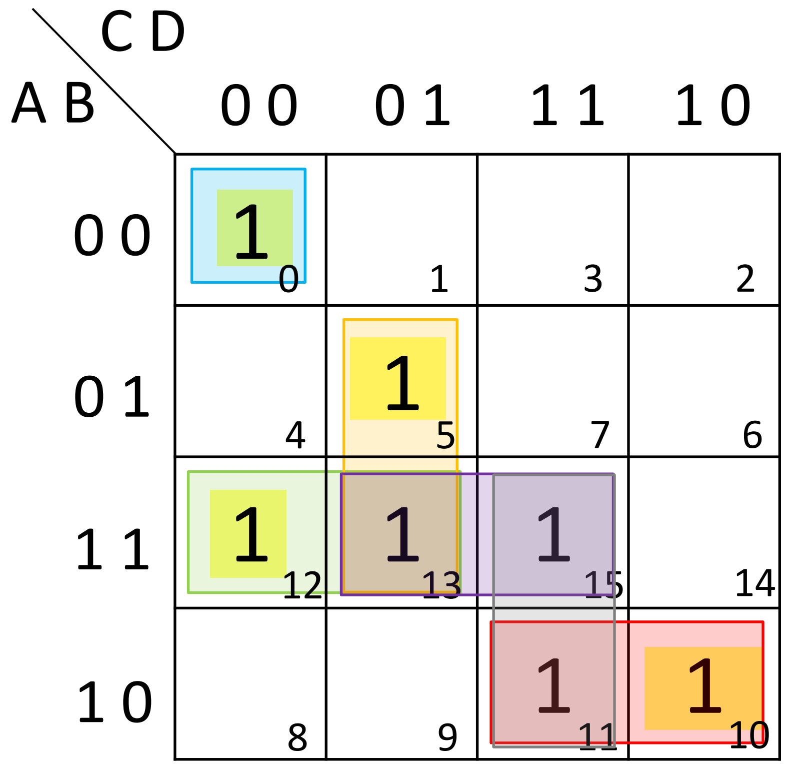
Ci sono 3 IP, che sono anche IPE, quindi la funzione semplificata è:

$$G(A,B,C,D) = \bar{A}\bar{C} + CD + \bar{B}\bar{D}$$

→ più semplice della funzione originaria!

Funzioni a 4 variabili

Esempio 3: considerare la funzione rappresentata dalla seguente MdK e trovarne la forma minima



- Ci sono 6 IP
- 4 IP sono anche IPE

Funzioni a 4 variabili

Esempio 3: considerare la funzione rappresentata dalla seguente MdK e trovarne la forma minima

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	1 15	14
10	8	9	11	10

- Rimane scoperto solo m_{15} che può essere coperto da (13,15) o (15,11)

- Abbiamo 2 forme minime equivalenti:

$$F = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + B\bar{C}D + AB\bar{C} + A\bar{B}C + \begin{matrix} ACD \\ \text{oppure} \\ ABD \end{matrix}$$

Minimizzazione di POS

- Finora abbiamo visto la minimizzazione delle funzioni in forma di SOP
- In modo duale, possiamo trattare la forma di POS, partendo dalla definizione del complemento della funzione di partenza

Minimizzazione di POS

Esempio: Trovare la minima POS per la funzione con i seguenti mintermini:

$$F(A,B,C,D) =$$
$$= \sum m(0,1,2,5,8,9,10)$$

AB \ CD	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	1_{0}	1_{1}	0_{3}	1_{2}
0 1	0_{4}	1_{5}	0_{7}	0_{6}
1 1	0_{12}	0_{13}	0_{15}	0_{14}
1 0	1_{8}	1_{9}	0_{11}	1_{10}

- Ci sono 3 IP che sono anche IPE
- La forma minima della funzione negata è:

$$\bar{F} = AB + CD + B\bar{D}$$

$$\Rightarrow\ F = (\bar{A} + \bar{B})\,(\bar{C} + \bar{D})\,(\bar{B} + D)$$

Condizioni di «Don’t care»

- Le condizioni di don’t care (**condizioni di indifferenza**) si hanno quando una **funzione non è completamente specificata**
- Finora abbiamo assunto che la funzione valesse ‘0’ in tutti i casi in cui non valeva ‘1’, ma questo non è sempre vero
- Per certe applicazioni, la funzione può non essere specificata per alcune combinazioni delle variabili in ingresso: a queste combinazioni corrisponde una condizione di don’t care
- Indicheremo le condizioni di don’t care con una ‘X’ nella mappa di K: queste caselle possono assumere il valore ‘1’ o ‘0’, a seconda di quello che fa più comodo ai fini della semplificazione

Condizioni di «Don’t care»: esempio

- Si realizzi una funzione che indica se un numero compreso tra 0 e 9 è primo
  - Per rappresentare i numeri da 0 a 9 servono 4 cifre binarie
  - La tabella di verità della funzione contiene 16 righe, ma solo 10 di queste righe sono rilevanti per la funzione: le righe rimanenti sono indicate nella tabella di verità come condizioni di don’t care

Condizioni di «Don't care»

Esempio: Trovare la forma minima della seguente funzione non completamente specificata

$$F(A,B,C,D) = \sum m(1,3,7,11,15) \qquad d(A,B,C,D) = \sum m(0,2,5)$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	X_{0}	1_{1}	1_{3}	X_{2}
01	0_{4}	X_{5}	1_{7}	0_{6}
11	0_{12}	0_{13}	1_{15}	0_{14}
10	0_{8}	0_{9}	1_{11}	0_{10}

Possiamo o meno includere le caselle con 'X', scegliendo gli implicanti che portano alla forma più semplice della funzione

$$F(A,B,C,D) = CD + \bar{A}\bar{B}$$

Condizioni di «Don’t care»

<u>Esempio</u>: Trovare la forma minima della seguente funzione non completamente specificata

$$F(A,B,C,D) = \sum m(1,3,7,11,15) \qquad d(A,B,C,D) = \sum m(0,2,5)$$

AB \ CD	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	X $_{0}$	1 $_{1}$	1 $_{3}$	X $_{2}$
0 1	0 $_{4}$	X $_{5}$	1 $_{7}$	0 $_{6}$
1 1	0 $_{12}$	0 $_{13}$	1 $_{15}$	0 $_{14}$
1 0	0 $_{8}$	0 $_{9}$	1 $_{11}$	0 $_{10}$

Una scelta alternativa può essere:

$$F(A,B,C,D) = CD + \bar{A}D$$

Abbiamo trovato 2 forme equivalenti: **algebricamente diverse**, **ma uguali per i valori degli ingressi che ci interessano**!

Funzioni XOR e NOR

- Abbiamo definito le funzioni **OR esclusivo** (**XOR**):

$$\boldsymbol{X \oplus Y = X\overline{Y} + \overline{X}Y}$$

e la sua complementare **NOR esclusivo** (**XNOR**):

$$\boldsymbol{\overline{X \oplus Y} = XY + \overline{X}\,\overline{Y}}$$

- Sono commutative e associative e valgono le seguenti proprietà:

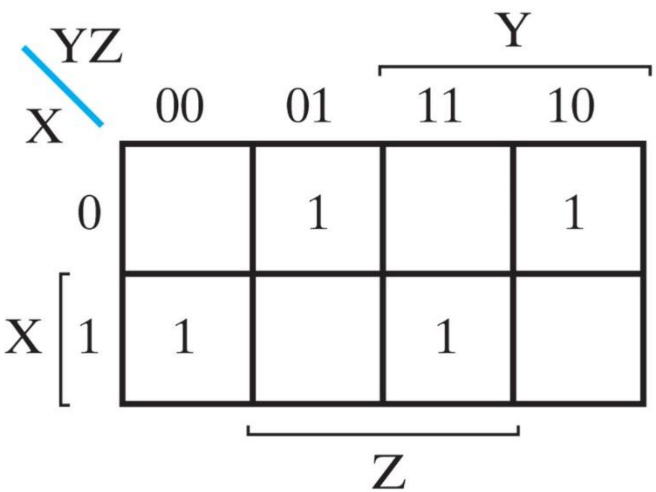
$$X \oplus 0 = X \qquad X \oplus 1 = \bar{X}$$

$$X \oplus X = 0 \qquad X \oplus \bar{X} = 1$$

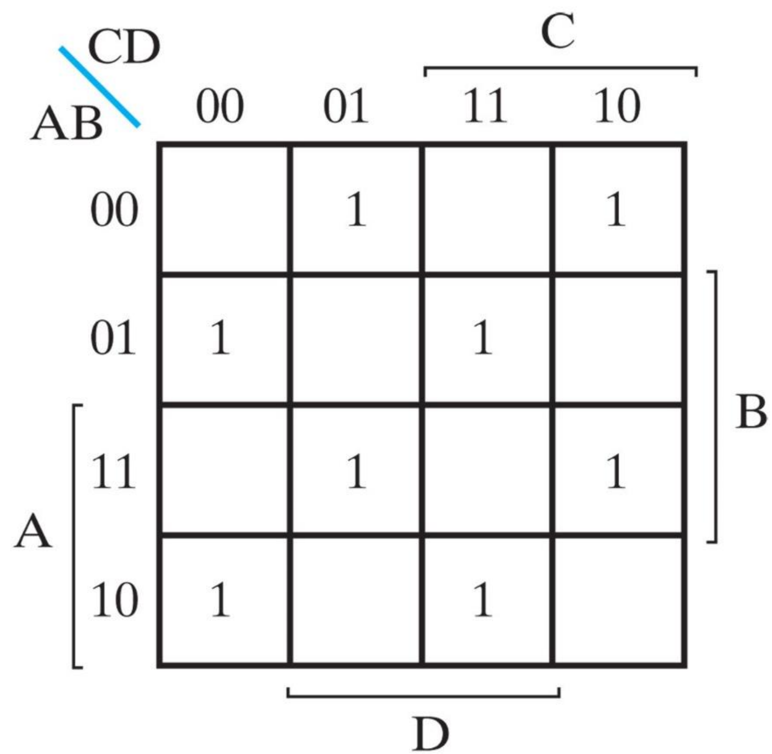
$$X \oplus \bar{Y} = \overline{X \oplus Y} \qquad \bar{X} \oplus Y = \overline{X \oplus Y}$$

XOR: funzione disparità

- La funzione **XOR può essere estesa a 3 o più variabili** ed è anche chiamata **funzione disparità** (odd)



(a) $X \oplus Y \oplus Z$

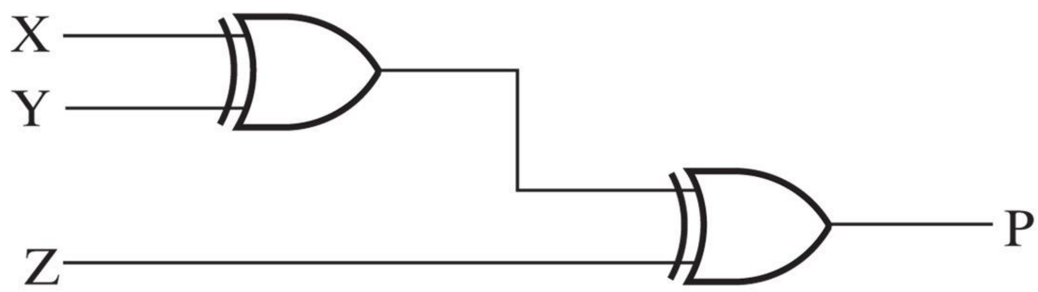


(b) $A \oplus B \oplus C \oplus D$

I mintermini sulle mappe sono dispari e collocati a distanza 2 l’uno dall’altro

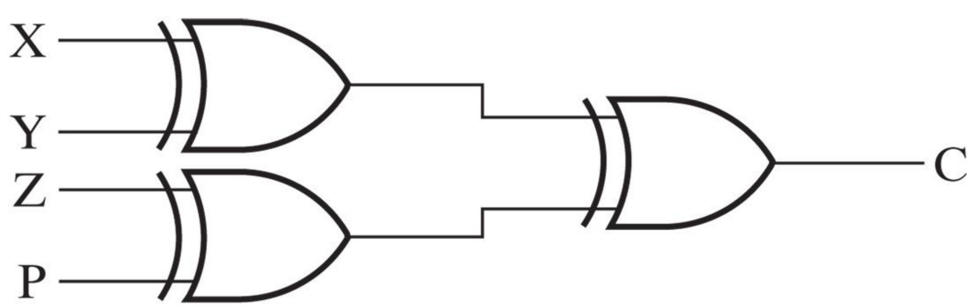
XOR: funzione disparità

- Il circuito logico per la funzione **disparità a tre variabili** è:



$$P = X \oplus Y \oplus Z$$

- Il circuito logico per la funzione **disparità a quattro variabili** è:



(b) $C = X \oplus Y \oplus Z \oplus P$

XNOR: funzione parità

- Il complemento della funzione disparità è detto **funzione parità**: i mintermini sulle mappe sono pari e, come per la funzione dispari, collocati a distanza 2 l’uno dall’altro
- Il circuito logico si ottiene da quello della funzione disparità, sostituendo le porte XOR con porte XNOR

Riepilogo

- **Mintermine**: prodotto di tutti gli ingressi (diretti o negati) di una funzione, presi una e una sola volta
- **Maxtermine**: somma di tutti gli ingressi (diretti o negati) di una funzione, presi una e una sola volta
- **Mintermine di una funzione**: mintermine in corrispondenza a cui la funzione vale 1
- **Maxtermine di una funzione**: maxtermine in corrispondenza a cui la funzione vale 0
- **Forma canonica SOP**: somma di tutti i mintermini della funzione
- **Forma canonica POS**: prodotto di tutti i maxtermini della funzione
- **Forma minima SOP o POS**: espressione in forma di somma di prodotti o prodotto di somme, semplificata il più possibile rispetto alla forma canonica (non tutti i termini contengono tutti i letterali)
- **Criteri di costo**: numero di letterali o numero di ingressi delle porte
- **Mappa di Karnaugh**: metodo grafico per trasformare una funzione in forma minima SOP o POS

Disclaimer

Figures from *Logic and Computer Design Fundamentals*, Fifth Edition, GE Mano | Kime | Martin

© 2016 Pearson Education, Ltd