

CAPITOLO 5

**Motore sincrono a magneti permanenti (brushless sinusoidale)**

**5.1 - Struttura e principio di funzionamento**

I motori sincroni a magneti permanente, praticamente detti anche *brushless sinusoidali*<sup>1</sup>, sono impiegati sempre più diffusamente in ambito industriale, specialmente nei servozionamenti di piccola e media potenza.

Essi sono essenzialmente destinati ad azionamenti ad elevate prestazioni, in cui le particolari specifiche giustificano il loro costo che è solitamente elevato per la presenza di magneti permanenti di pregio nel rotore (parte rotante).

La *conversione elettromeccanica* che essi attuano segue il principio di funzionamento dei sistemi elettrodinamici (come per le macchine in corrente continua) che si basa sull'interazione fra conduttori percorsi da correnti e campi magnetici creati da altri conduttori o magneti permanenti; i conduttori su cui agiscono le forze sono collocati nello statore (parte fissa) mentre i magneti permanenti sono sul rotore.

Una rappresentazione schematica della struttura di un motore sincrono a magneti permanenti a rotore isotropo a due poli è mostrata in Fig.5.1.1.

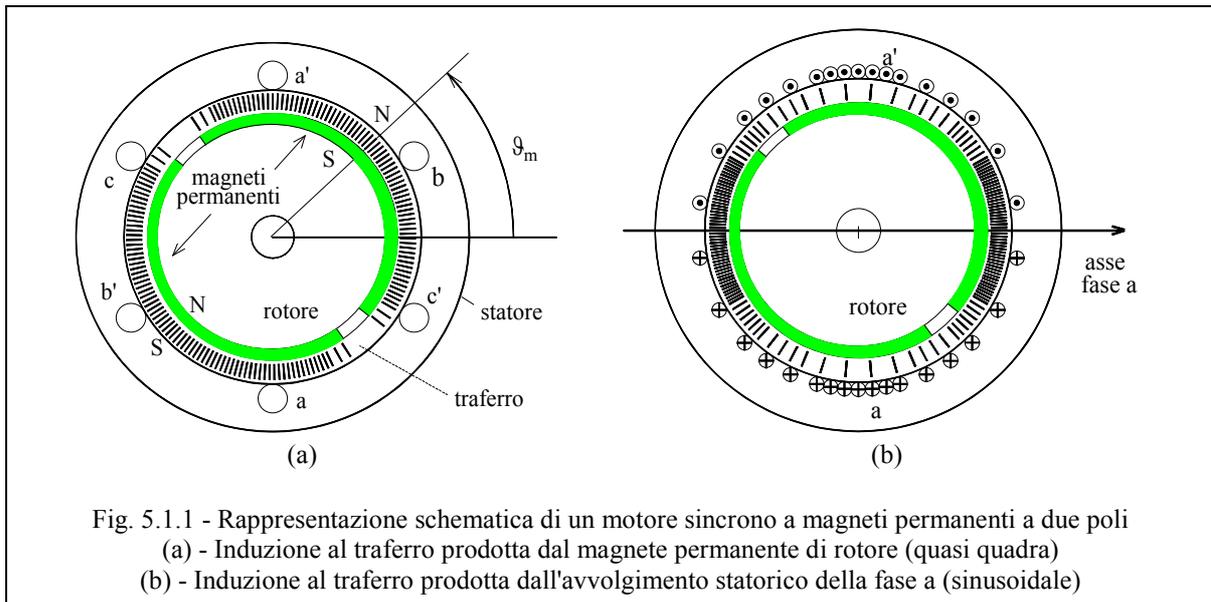


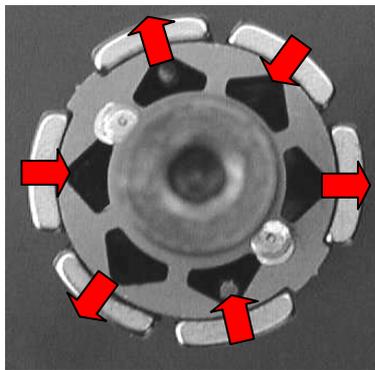
Fig. 5.1.1 - Rappresentazione schematica di un motore sincrono a magneti permanenti a due poli  
 (a) - Induzione al traferro prodotta dal magnete permanente di rotore (quasi quadra)  
 (b) - Induzione al traferro prodotta dall'avvolgimento statorico della fase a (sinusoidale)

Lo statore ed il rotore sono entrambi a forma di corona cilindrica di materiale ferromagnetico laminato e separati da un *traferro* in aria. Sul rotore trovano posto i magneti permanenti; dato che essi presentano generalmente una permeabilità magnetica differenziale molto simile a quella dell'aria, a seconda della loro disposizione e della forma del rotore si possono ottenere strutture di

<sup>1</sup> Più propriamente si dovrebbe dire “motori sincroni con fem sinusoidale” o “brushless con fem sinusoidali” in ragione della forma d’onda delle forze elettromotrici che questi motori presentano nel funzionamento a velocità costante, come si vedrà più avanti. Esistono anche motori brushless con fem non sinusoidali, per esempio trapezoidali ed essi sono denominati “brushless con fem trapezoidali” o, sbrigativamente “brushless trapezoidali”. Questi non sono trattati in questo capitolo.

rotore isotrope o anisotrope dal punto di vista magnetico, che caratterizzano rispettivamente i motori brushless SPM (*surface permanent magnet*) e IPM (*interior permanent magnet*). Quella in Fig. 5.1.1 è la rappresentazione di un motore SPM.

L'avvolgimento di statore è di tipo trifase; le tre fasi hanno uguale numero e distribuzione dei conduttori (indicati con aa', bb', cc' in Fig.5.1.1(a)) ma sono reciprocamente sfasate nello spazio di  $2\pi/3$ , e ciascuna fa capo ad una coppia di morsetti attraverso i quali è possibile fornire loro alimentazione da una sorgente trifase esterna. I conduttori che compongono ciascuna fase (Fig.5.1.1(b)) sono distribuiti lungo le cave statoriche ricavate secondo la direzione delle generatrici del cilindro di statore, omesse per semplicità nel disegno. La stessa figura riporta, in (a), una rappresentazione schematica in cui ciascuna fase è simbolicamente rappresentata con una sola coppia di conduttori; si intende che l'asse di ogni fase sia la retta normale al piano che passa per ciascuna coppia di conduttori (Fig.5.1.1 (b)).



La foto a lato illustra un rotore di un piccolo motore brushless a 6 poli. Si noti che i magneti non sono equidistanti lungo il traferro. Ciò è il risultato di una ottimizzazione del progetto al fine di minimizzare la tendenza del rotore ad assumere alcune specifiche posizioni a causa dell'attrazione fra magneti di rotore e denti di statore.

I canali praticati nel rotore hanno lo scopo di ridurre il momento di inerzia.

**5.1.1. - Equazioni elettriche di statore** - Per descrivere il funzionamento del motore brushless sinusoidale si può partire dalle equazioni generali di bilancio delle tensioni  $u_a$ ,  $u_b$ ,  $u_c$  delle sue fasi  $a, b, c$ , che con la convenzione di segno degli utilizzatori risultano:

$$\begin{aligned} u_a(t) &= Ri_a(t) + \frac{d\lambda_a(t)}{dt} = \\ u_b(t) &= Ri_b(t) + \frac{d\lambda_b(t)}{dt} \\ u_c(t) &= Ri_c(t) + \frac{d\lambda_c(t)}{dt} \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

dove  $i_a$ ,  $i_b$ ,  $i_c$  sono le correnti che percorrono le tre fasi,  $\lambda_a$ ,  $\lambda_b$ ,  $\lambda_c$  sono i flussi magnetici concatenati con ciascuna fase ed  $R$  è la resistenza di fase, che si suppone uguale per le tre fasi.

Se si fa l'ipotesi di *assenza di saturazione* dei circuiti magnetici, il flusso concatenato da ciascuna fase è la somma del flusso concatenato prodotto dal magnete permanente e quello dovuto alle correnti di fase:

$$\begin{aligned} \lambda_a(t) &= \lambda_{a,mg}(t) + \lambda_{a,i}(t) \\ \lambda_b(t) &= \lambda_{b,mg}(t) + \lambda_{b,i}(t) \\ \lambda_c(t) &= \lambda_{c,mg}(t) + \lambda_{c,i}(t) \end{aligned}$$

Questi due contributi verranno ora analizzati in dettaglio, facendo riferimento ad una struttura isotropa; nel par.5.2 verrà fornita una traccia per l'estensione delle formule ricavate al caso più generale di rotore anisotropo.



Si supponga di *non inviare alcuna corrente* all'avvolgimento statorico. La combinazione di una opportuna sagomatura del magnete e della distribuzione circonferenziale non uniforme (approssimativamente sinusoidale) dei conduttori di ciascuna fase, evidenziata in Fig. 5.1.1(b), consentono di ottenere flussi concatenati dovuti al magnete permanente pressoché sinusoidali. Scegliendo arbitrariamente come coordinata di riferimento l'angolo elettrico<sup>2</sup>  $\vartheta_{me}$  tra l'asse della fase a e quello del campo prodotto dal magnete permanente, definita anche *posizione elettromeccanica o meccanica-elettrica*, si può scrivere:

$$\begin{aligned}\lambda_{a,mg} &= \Lambda_{mg} \cos(\vartheta_{me}) \\ \lambda_{b,mg} &= \Lambda_{mg} \cos(\vartheta_{me} - 2\pi/3) \\ \lambda_{c,mg} &= \Lambda_{mg} \cos(\vartheta_{me} - 4\pi/3)\end{aligned}\quad (5.1.2)$$

dove  $\Lambda_{mg}$  rappresenta il massimo flusso concatenato con ciascuna fase per effetto del magnete permanente. La terna di grandezze espressa dalla (5.1.2) è evidentemente priva della componente omopolare; a tale terna si può allora associare in modo univoco il vettore spaziale<sup>3</sup> (cfr. cap.1)

$$\lambda_{mg}^s = \Lambda_{mg} e^{j\vartheta_{me}} \quad (5.1.3)$$

dove l'apice s indica che ci si riferisce ad un *sistema di riferimento stazionario*, ovvero quello che nel capitolo relativo all'introduzione dei vettori spaziali è stato definito come sistema di riferimento  $\alpha$ - $\beta$ . La (5.1.3) mostra che il vettore spaziale del flusso concatenato da statore e dovuto al magnete permanente è allineato con l'asse polare, se si fa coincidere l'asse  $\alpha$  con l'asse della fase a<sup>4</sup>. La Fig. 5.1.2, in cui appare  $\vartheta_m$  perché si riferisce ad un esempio con una coppia polare ( $p=1$ ), riporta quanto descritto.

E' possibile in questo caso dare un significato fisico al vettore spaziale; la sua rappresentazione nel piano complesso, fatto coincidere con il piano di sezione della Fig.5.1.1, indica effettivamente la posizione

<sup>2</sup> L'angolo elettrico  $\vartheta_{me}$  è legato alla posizione meccanica  $\vartheta_m$  dalla relazione  $\vartheta_{me} = p\vartheta_m$ , con  $p$  = numero di coppie polari del motore. Intuitivamente, se vi sono  $p$  coppie polari la situazione elettromagnetica viene a ripresentarsi  $p$  volte nel corso di una rotazione meccanica del rotore; è "come se" l'angolo delle grandezze elettriche e magnetiche corresse  $p$  volte più veloce di quello meccanico, in linea con la sua definizione. Naturalmente, in presenza di un rotore con  $p$  coppie polari anche l'avvolgimento di statore sarà costruito in modo che le sue fasi si succedano sfasate di  $2\pi/3$  rad "elettrici", ovvero  $2\pi/3p$  rad "meccanici".

<sup>3</sup> Le grandezze vettoriali saranno indicate in **grassetto**.

<sup>4</sup> Per questo motivo si dice che il sistema di riferimento stazionario  $\alpha$ - $\beta$  è "fisso con lo statore".

dell'asse polare ovvero la posizione in cui andrebbe posto l'asse di un ipotetico avvolgimento per ottenere nell'istante considerato il massimo flusso concatenato, e questo rende ragione in qualche modo del termine "vettore spaziale".

Si analizza ora il flusso concatenato prodotto negli avvolgimenti dalle correnti di fase. Data l'ipotesi di isotropia della struttura e la simmetria degli avvolgimenti di fase, si può ammettere che le autoinduttanze di fase siano tutte uguali tra loro, come pure le mutue induttanze tra ciascuno degli avvolgimenti e gli altri due. In particolare, è facile rendersi conto che i flussi mutuamente accoppiati hanno segno opposto a quelli che si autoconcatenano in ciascun avvolgimento; si può scrivere cioè, con ovvio significato dei simboli:

$$\begin{aligned} L_a &= L_b = L_c = L_{ss} \\ L_{Mab} &= L_{Mac} = L_{Mbc} = -|L_{Mss}| \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

I flussi concatenati totali si esprimono allora come segue:

$$\begin{aligned} \lambda_a &= L_a i_a + L_{Mab} i_b + L_{Mac} i_c + \lambda_{a,mg} = L_{ss} i_a - |L_{Mss}|(i_b + i_c) + \lambda_{a,mg} \\ \lambda_b &= L_b i_b + L_{Mab} i_a + L_{Mbc} i_c + \lambda_{b,mg} = L_{ss} i_b - |L_{Mss}|(i_a + i_c) + \lambda_{b,mg} \\ \lambda_c &= L_c i_c + L_{Mbc} i_b + L_{Mac} i_a + \lambda_{c,mg} = L_{ss} i_c - |L_{Mss}|(i_a + i_b) + \lambda_{c,mg} \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

dove si sono tralasciate le ormai ovvie dipendenze dal tempo delle correnti di fase e dei flussi concatenati dovuti al magnete permanente.

Generalmente i motori sincroni a magneti permanenti hanno avvolgimenti statorici privi di filo neutro; in altre parole è verificata l'ipotesi di avere ad ogni istante la somma delle correnti di fase pari a zero:

$$\forall t, \quad i_a + i_b + i_c = 0 \quad (5.1.6)$$

Utilizzando tale espressione nelle (5.1.5) e ricordando le (5.1.2) si ha infine

$$\begin{aligned} \lambda_a &= L i_a + \Lambda_{mg} \cos(\vartheta_{me}) \\ \lambda_b &= L i_b + \Lambda_{mg} \cos(\vartheta_{me} - 2\pi/3) \\ \lambda_c &= L i_c + \Lambda_{mg} \cos(\vartheta_{me} - 4\pi/3) \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

dove si è definita l'*induttanza sincrona*  $L = L_{ss} + |L_{Mss}|$ .

Si può notare come apparentemente il flusso concatenato di ogni fase dipenda ora solo dalla corrente nella fase stessa; o meglio, è tutto "come se" ciascuna fase si comportasse in modo indipendente dalle altre. Naturalmente occorre però ricordare che  $L$  non ha il significato proprio di un'autoinduttanza, dato che essa è composta anche da termini di mutua induttanza  $L_{Mss}$ , percorsi da correnti provenienti dalle altre fasi, che solo in virtù dell'ipotesi (5.1.6) si richiudono totalmente nella fase considerata.

Le equazioni di bilancio delle tensioni (5.1.1) si possono ora particolarizzare utilizzando le (5.1.7):

$$u_a = R i_a + L \frac{di_a}{dt} + e_a$$

$$\begin{aligned}
 u_b &= R i_b + L \frac{di_b}{dt} + e_b \\
 u_c &= R i_c + L \frac{di_c}{dt} + e_c
 \end{aligned}
 \tag{5.1.8}$$

dove si sono definite le forze contro elettromotrici  $e_a$ ,  $e_b$ ,  $e_c$  dovute al movimento del magnete permanente rispetto agli avvolgimenti di statore:

$$\begin{aligned}
 e_a &= \frac{d\lambda_{a,mg}}{dt} = -\Lambda_{mg} \omega_{me} \sin(\vartheta_{me}) = \Lambda_{mg} \omega_{me} \cos(\vartheta_{me} + \pi/2) \\
 e_b &= \frac{d\lambda_{b,mg}}{dt} = \Lambda_{mg} \omega_{me} \cos(\vartheta_{me} + \pi/2 - 2\pi/3) \\
 e_c &= \frac{d\lambda_{c,mg}}{dt} = \Lambda_{mg} \omega_{me} \cos(\vartheta_{me} + \pi/2 - 4\pi/3)
 \end{aligned}
 \tag{5.1.9}$$

dove, come già accennato,  $\omega_{me}$  (espressa in rad.el./s) è la velocità elettromeccanica, ed è stata omessa per semplicità l'indicazione della dipendenza dal tempo anche della posizione elettromeccanica  $\vartheta_{me}$ .

Le (5.1.9) mostrano che nel funzionamento a velocità di rotazione costante le fem sono grandezze sinusoidali<sup>5</sup>, isofrequenziali, con pulsazione (frequenza angolare) pari proprio a  $\omega_{me}$ <sup>6</sup> e ampiezza (valore massimo) dato da  $\hat{E} = \omega_{me} \Lambda_{mg}$ . Se  $f$  è la frequenza di dette fem allora vale  $2\pi f = \omega_{me}$  e pertanto risulta:

$$f = \frac{p\omega_m}{2\pi} = \frac{pn}{60}$$

se si tiene conto che  $\omega_m = 2\pi n/60$  con  $n$  velocità di rotazione in giri/min (rpm).

Per quanto riguarda l'ampiezza delle fem si può ricordare che nel regime sinusoidale trifase i valori massimi e i valori efficaci delle tensioni concatenate sono pari a  $\sqrt{3}$  volte i corrispondenti valori delle tensioni di fase o stellate. Da ciò, assumendo che il motore abbia i suoi avvolgimenti collegati a stella, si possono scrivere i seguenti passaggi:

$$E_{conc,eff} = \sqrt{3} E_{fase,eff} = \sqrt{3} \hat{E} / \sqrt{2} = \sqrt{3} \omega_{me} \Lambda_{mg} / \sqrt{2} = \sqrt{3} p \omega_m \Lambda_{mg} / \sqrt{2}$$

Nella pratica è spesso definita la "costante di fem"  $K_E = E_{conc,eff} / \omega_m$  che pertanto risulta

$$K_E = E_{conc,eff} / \omega_m = \sqrt{(3/2)} p \Lambda_{mg}$$

ovvero

$$p \Lambda_{mg} = \sqrt{(2/3)} K_E$$

Come le correnti, che hanno somma nulla per ipotesi, è evidente che anche le f.e.m. indicate nelle (5.1.9) hanno somma nulla, trattandosi di una terna di sinusoidi sfasate reciprocamente di  $2\pi/3$  rad.el.; essendo così tutte le grandezze che appaiono nella (5.1.8) prive di componente omopolare è possibile ottenere una espressione più compatta ricorrendo alle relative notazioni

<sup>5</sup> Da cui la denominazione pratica di "brushless sinusoidali".

<sup>6</sup> Per tale motivo la macchina si chiama "sincrona".

secondo i vettori spaziali. Innanzitutto, alle forze controelettromotrici (5.1.9) si associa il vettore spaziale  $\mathbf{e}^s$  dato da:

$$\mathbf{e}^s = \frac{d\lambda_{mg}^s}{dt} = \frac{d(\Lambda_{mg} e^{j\vartheta_{me}})}{dt} = j\Lambda_{mg}\omega_{me} e^{j\vartheta_{me}} = j\omega_{me}\lambda_{mg}^s \quad (5.1.10)$$

e la terna di equazioni (5.1.8) risulta essere espressa in modo conciso dalla

$$\mathbf{u}^s = R\mathbf{i}^s + L\frac{d\mathbf{i}^s}{dt} + \mathbf{e}^s = R\mathbf{i}^s + L\frac{d\mathbf{i}^s}{dt} + j\omega_{me}\lambda_{mg}^s \quad (5.1.11)$$

che può essere espressa secondo le sue componenti reale  $u_\alpha$  ed immaginaria  $u_\beta$ :

$$\begin{aligned} u_\alpha &= R i_\alpha + L \frac{di_\alpha}{dt} - \omega_{me} \lambda_{\beta,mg} \\ u_\beta &= R i_\beta + L \frac{di_\beta}{dt} + \omega_{me} \lambda_{\alpha,mg} \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

Alle (5.1.8) si può applicare si può applicare il bilancio delle potenze. Moltiplicando ciascuna delle equazioni per la rispettiva corrente di fase e sommando termie e termine si ottiene:

$$u_a i_a + u_b i_b + u_c i_c = R(i_a^2 + i_b^2 + i_c^2) + \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} L(i_a^2 + i_b^2 + i_c^2) \right] + e_a i_a + e_b i_b + e_c i_c$$

In virtù della convenzione di segno degli utilizzatori adottata, il primo membro rappresenta la potenza istantanea assorbita dal motore. Il primo termine a secondo membro è la potenza istantanea dissipata per effetto Joule sulle resistenze di fase. Il secondo termine è la potenza assorbita, positiva o negativa, impegnata per produrre le variazioni dell'energia magnetica connessa con il campo magnetico prodotto dalle correnti di fase. Di conseguenza il terzo termine rappresenta la *potenza elettromeccanica* ovvero la potenza elettrica che viene convertita in potenza meccanica pari anche al prodotto fra il momento torcente (coppia) sviluppata e la velocità di rotazione. Vale allora

$$e_a i_a + e_b i_b + e_c i_c = m\omega_m = \frac{m\omega_{me}}{p}$$

Ricordando le (5.1.9) si ottiene infine

$$m = p\Lambda_{mg} \left[ i_a \cos(\vartheta_{me} + \frac{\pi}{2}) + i_b \cos(\vartheta_{me} + \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}) + i_c \cos(\vartheta_{me} + \frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{3}) \right]$$

Questa equazione della coppia non è di frequente e pratico uso. Tuttavia essa permette di osservare che:

- Non c'è coppia senza correnti
- La coppia è indipendente da  $\vartheta_{me}$  se si alimenta il motore con una terna di correnti, isofrequenziali con le fem, del tipo

$$i_a(t) = I_M(t) \cos(\vartheta_{me} + \pi/2 - \psi)$$

$$i_b(t) = I_M(t) \cos(\vartheta_{me} + \pi/2 - \psi - 2\pi/3)$$

$$i_c(t) = I_M(t) \cos(\vartheta_{me} + \pi/2 - \psi - 4\pi/3)$$

avendo definito l'angolo  $\psi$ , supposto costante per semplicità, di ritardo della terna delle correnti rispetto alla terna delle fem. Con le correnti appena definite ne risulta:

$$m(t) = \frac{3}{2} p \Lambda_{mg} I_M(t) \cos(\psi)$$

Quest'ultima equazione mostra che:

- c) la coppia può essere controllata attraverso l'ampiezza  $I_M$  della terna di correnti, per ogni valore di  $\psi$ .
- d) a parità di ampiezza delle correnti si ha la massima coppia (in valore assoluto) con  $\psi=0$  (coppia positiva) o  $\psi=\pi$  (coppia negativa): condizioni di *massimo rapporto coppia su corrente* (condizioni di *massima coppia per ampere*).
- e) La condizione d) significa che nelle condizioni di massima coppia per ampere, ogni corrente è in fase o in opposizione di fase con la rispettiva fem, ovvero in quadratura in anticipo o in ritardo rispetto ai flussi concatenati di ciascuna fase.

Se il bilancio delle potenze è invece applicato alle (5.1.12), con analoghe considerazioni e ricordando che la trasformazione da abc ad  $\alpha\beta$  non è conservativa per le potenze si ottiene:

$$m = \frac{3}{2} p [\lambda_\alpha i_\beta - \lambda_\beta i_\alpha] = \frac{3}{2} p [\lambda_{\alpha,mg} i_\beta - \lambda_{\beta,mg} i_\alpha]$$

ove la dipendenza dal tempo delle varie grandezze è stata sottintesa per semplicità.

La stessa espressione può essere riarrangiata nel seguente modo:

$$m = \frac{3}{2} p \operatorname{Im}[\mathbf{i}_s^s \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_s^s] = \frac{3}{2} p |\mathbf{i}_s| |\boldsymbol{\lambda}_s| \sin(\vartheta_i^s - \vartheta_\lambda^s) = \frac{3}{2} p |\mathbf{i}_s| |\boldsymbol{\lambda}_s| \sin \vartheta_i^\lambda$$

ove  $\operatorname{Im}[\bullet]$  è l'operatore di estrazione del "coefficiente dell'immaginario",  $\vartheta_i^\lambda$  è l'angolo fra il vettore spaziale della corrente e quello del flusso statorico (sfasamento) e si è assunto:

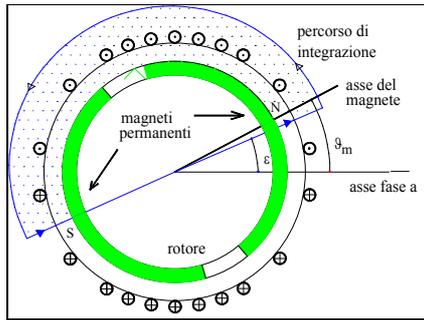
$$\mathbf{i}_s^s = |\mathbf{i}_s| e^{j\vartheta_i^s}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_s^s = |\boldsymbol{\lambda}_s| e^{j\vartheta_\lambda^s}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_s^s = |\boldsymbol{\lambda}_s| e^{-j\vartheta_\lambda^s} \quad (\text{complesso coniugato})$$

L'ultima equazione trovata della coppia mostra che essa non dipende dal sistema di riferimento essendo tutte le grandezze (moduli e sfasamenti) indipendente da questo.

**5.1.1.1 – Campo magnetico rotante** - Supponendo per esempio di alimentare la fase  $a$  con una corrente  $i_a$  positiva entrante al morsetto  $a$  si ottiene, sempre per la particolare geometria dell'avvolgimento, una distribuzione sinusoidale di induzione al traferro  $B_a$ , come schematizzato in Fig.5.1.1, che riporta le linee di campo di  $B_a$  al traferro nell'istante considerato.



Nel caso di rotore isotropo, la derivazione di tale andamento è abbastanza intuitiva; per il calcolo si può applicare il teorema di circuitazione scegliendo per comodità come percorso d'integrazione una semicirconferenza che ruoti in senso antiorario, con coordinata angolare  $\varepsilon$  espressa in radianti elettrici; nella figura sopra  $\varepsilon$  coincide con quella espressa in radianti perché nell'esempio il motore ha una sola coppia polare. Le chiusure del percorso di integrazione sono poi nel ferro di rotore e di statore, ove la caduta di tensione magnetica può considerarsi trascurabile. Le amperspire  $N_c(\varepsilon) i_a$  concatenate ad ogni posizione angolare  $\varepsilon$  sono legate direttamente all'induzione al traferro dall'espressione

$$B_a(\varepsilon) = \frac{\mu_0 N_c(\varepsilon) i_a}{2x} \quad (5.1.13)$$

dove  $x$  è lo spessore del traferro e  $\mu_0$  è la permeabilità magnetica dell'aria. Se il rotore fosse invece anisotropo, l'andamento dell'induzione al traferro ad opera delle sole correnti statoriche dipenderebbe anche dalla posizione  $\vartheta_m$  del rotore.

Assumendo che all'istante  $t$  l'avvolgimento di statore sia alimentato dalla generica terna di correnti  $i_a(t)$ ,  $i_b(t)$ ,  $i_c(t)$  si può dunque scrivere

$$\begin{aligned} B_a(t, \varepsilon) &= k i_a(t) \cos(\varepsilon) \\ B_b(t, \varepsilon) &= k i_b(t) \cos(\varepsilon - 2\pi/3) \\ B_c(t, \varepsilon) &= k i_c(t) \cos(\varepsilon - 4\pi/3) \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

dove la costante  $k$  tiene conto delle dimensioni del traferro e del numero di spire dell'avvolgimento. Nello scrivere la (5.1.14) si è assunto che il numero di spire concatenate dalla semicirconferenza impiegata per fare la circuitazione vari con  $\varepsilon$  con legge cosinusoidale in virtù della distribuzione sinusoidale dell'avvolgimento. L'induzione totale al traferro, ad opera delle correnti statoriche, si ottiene sommando punto per punto ed istante per istante le tre distribuzioni indicate dalla (5.1.14). Si ottiene<sup>7</sup>:

$$B_{abc}(t, \varepsilon) = k \left( i_a - \frac{1}{2} i_b - \frac{1}{2} i_c \right) \cos(\varepsilon) + k \left( \frac{\sqrt{3}}{2} i_b - \frac{\sqrt{3}}{2} i_c \right) \sin(\varepsilon) = \frac{3}{2} k i_\alpha \cos(\varepsilon) + \frac{3}{2} k i_\beta \sin(\varepsilon) \quad (5.1.15)$$

dove si è omessa per semplicità la dipendenza delle correnti dal tempo, e  $i_\alpha(t)$  e  $i_\beta(t)$  sono rispettivamente la componente reale ed immaginaria del vettore spaziale di corrente  $i(t)$  associato alla terna  $i_a(t)$ ,  $i_b(t)$ ,  $i_c(t)$ .

- Dalla (5.1.15) si può osservare che l'induzione al traferro è considerabile come la somma di due termini, che potrebbero essere forniti da due soli avvolgimenti, aventi ciascuno  $3/2 N$  spire (se  $N$  è il numero di spire di una delle fasi attuali) e con gli assi tra loro ortogonali, in modo da produrre la massima induzione

<sup>7</sup> Si ricordi che  $\cos(\varepsilon - 2\pi/3) = -1/2 \cos \varepsilon + \sqrt{3}/2 \sin \varepsilon$  e  $\cos(\varepsilon - 4\pi/3) = -1/2 \cos \varepsilon - \sqrt{3}/2 \sin \varepsilon$ .

B rispettivamente per  $\varepsilon=0$  (avvolgimento distribuito come la fase a) e per  $\varepsilon=\pi/2$  rad.el. (avvolgimento con asse in anticipo di  $\pi/2$  rad.el.).

- Si può notare anche che una eventuale componente omopolare della terna di correnti di fase non influenzerebbe l'induzione  $B_{abc}$ , come si può ricavare in modo diretto dalla (5.1.15). Si conclude che la componente omopolare delle correnti, se esiste, non partecipa alla creazione dell'induzione radiale nel motore.

Esprimendo in coordinate polari il vettore spaziale della corrente si ha:

$$\mathbf{i}^s(t) = i_\alpha(t) + i_\beta(t) = |\mathbf{i}^s(t)| e^{j\vartheta_i(t)} = |\mathbf{i}^s(t)| (\cos\vartheta_i(t) + j\sin\vartheta_i(t)) \quad (5.1.16)$$

dove  $\vartheta_i$  è la fase (sempre espressa in rad.el.) del vettore spaziale della corrente riferita all'asse reale del piano complesso, che coincide come si è detto con l'asse della fase  $a$ . Sostituendo la (5.1.16) nella (5.1.15) si ottiene:

$$B_{abc}(t, \varepsilon) = \frac{3}{2} k |\mathbf{i}^s(t)| \cos(\varepsilon - \vartheta_i(t)) \quad (5.1.17)$$

L'espressione appena ricavata consente, in analogia a quanto fatto per il magnete permanente, di attribuire un significato fisico al vettore spaziale della corrente; in particolare, esso indica in ogni istante la direzione ove è massima l'induzione al traferro creata dall'avvolgimento statorico stesso.

Dato che la coppia nasce dall'interazione tra campo magnetico e correnti si intuisce già che per avere una coppia netta non nulla occorrerà controllare le correnti di statore in modo che il relativo vettore spaziale sia in relazione di fase costante con il vettore spaziale del flusso prodotto dal magnete, ovvero i due vettori dovranno essere sincroni. Nel funzionamento a regime, il motore viene alimentato con una terna di correnti sinusoidali sfasate reciprocamente di  $2\pi/3$  rad.el. Il vettore spaziale associato ha ampiezza costante e ruota con velocità angolare costante  $\omega_{me} = d\vartheta_{me}/dt$ , che è detta pulsazione elettromeccanica ed è pari alla pulsazione delle correnti di fase; la (5.1.17) si semplifica nella seguente:

$$B_{abc}(t, \varepsilon) = \frac{3}{2} k |\mathbf{i}^s| \cos(\omega_{me} t - \varepsilon) = B_M \cos(\omega_{me} t - \varepsilon)$$

All'istante iniziale  $t=0$  essa rappresenta una distribuzione sinusoidale dell'induzione al traferro, con il suo valore massimo in corrispondenza dell'asse della fase  $a$  ( $\varepsilon=0$ ); negli istanti successivi tale massimo ruota (e con esso ovviamente tutta la distribuzione spaziale di  $B_{abc}$ ), dando luogo a quello che viene comunemente indicato come campo magnetico rotante, studiato per la prima volta da Galileo Ferraris nel 1885.

**5.1.2 – Equazioni elettriche nel sistema di riferimento sincrono** - Una espressione ancora più compatta e significativa può essere ottenuta scegliendo di esprimere i vettori spaziali contenuti nella (5.1.11) secondo un *sistema di riferimento sincrono* con il rotore cioè *rotante* con la velocità elettromeccanica  $\omega_{me}$ , con l'asse reale coincidente con l'asse polare di rotore; secondo tale riferimento, il vettore spaziale  $\lambda_{mg}$  risulta avere solo componente reale e questo induce una ulteriore semplificazione delle formule di bilancio delle tensioni statoriche. Il generico vettore spaziale  $\mathbf{g}^s$  viene espresso in tale riferimento sincrono (apice r) dalla relazione:

$$\mathbf{g}^r = \mathbf{g}^s e^{-j\vartheta_{me}} \quad (5.1.18)$$

Applicando la (5.1.18) alla (5.1.11), ricordando che  $\lambda_{mg}^r = \Lambda_{mg} + j0$  si ottiene<sup>8</sup> :

$$\mathbf{u}^r = R \mathbf{i}^r + L \frac{d\mathbf{i}^r}{dt} + j\omega_{me} L \mathbf{i}^r + j\omega_{me} \Lambda_{mg} \quad (5.1.19)$$

che può essere scritta al solito, separando la parte reale  $u_d$  ed immaginaria  $u_q$ :

$$\begin{aligned} u_d &= R i_d + L \frac{di_d}{dt} - \omega_{me} L i_q \\ u_q &= R i_q + L \frac{di_q}{dt} + \omega_{me} L i_d + \omega_{me} \Lambda_{mg} \end{aligned} \quad (5.1.20)$$

Le espressioni (5.1.20) consentono di eseguire un bilancio energetico nel sistema di riferimento sincrono, per ricavare un'espressione per la coppia meccanica sviluppata dal motore. Moltiplicando ambo i membri delle (5.1.20) rispettivamente per  $i_d dt$  e  $i_q dt$  e sommando membro a membro le due equazioni si ottiene:

$$(u_d i_d + u_q i_q) dt = (R i_d^2 + R i_q^2) dt + L i_d di_d + L i_q di_q + \omega_{me} \Lambda_{mg} i_q dt \quad (5.1.21)$$

Il primo membro rappresenta l'energia elettrica fornita al motore nel tempo  $dt$ ; essa è pareggiata dalla energia risultante dopo il processo di conversione elettromagnetica, le cui varie componenti sono rappresentate dai termini a secondo membro della (5.1.21). Il primo termine rappresenta l'energia trasformata in calore sulle resistenze degli avvolgimenti; il secondo ed il terzo costituiscono l'energia immagazzinata nel campo magnetico, collegata alle induttanze sincrone  $L$ . L'ultimo termine rappresenta infine l'energia meccanica sviluppata, nell'ipotesi di funzionamento da motore della macchina. Com'è noto, la trasformazione adottata per il passaggio dal sistema di riferimento stazionario a quello sincrono non è invariante per la potenza, che risulta diminuita del fattore  $2/3$ . Ricordando poi che la potenza meccanica si può esprimere anche come prodotto della coppia  $m$  per la velocità meccanica  $\omega_m$ , si ottiene in definitiva:

$$m = \frac{3}{2} p \Lambda_{mg} i_q \quad (5.1.22)$$

La (5.1.22) conferma che la coppia dipende solo dalla componente  $q$  della corrente, cioè dalla componente in quadratura rispetto al flusso concatenato dovuto ai magneti permanenti, cioè, anche, dalla componente in fase con le forze elettromotrici. Questo sarà il principio seguito per definire le correnti da inviare allo statore di un motore sincrono a magneti permanenti con rotore isotropo, inserito in un azionamento elettrico.

Dalle equazioni (5.1.20) e (5.1.22), unite all'equazione che rappresenta il carico meccanico:

$$m = m_L + B\omega_m + J \frac{d\omega_m}{dt} \quad (5.1.23)$$

---

<sup>8</sup> Si ricordi che vale l'espressione  $\frac{d\mathbf{i}^r}{dt} = \frac{d(\mathbf{i}^s e^{-j\theta_{me}})}{dt} = e^{-j\theta_{me}} \frac{d\mathbf{i}^s}{dt} - j\omega_{me} \mathbf{i}^s e^{-j\theta_{me}}$  .

è possibile tracciare lo schema a blocchi per il motore sincrono a magneti permanenti di tipo isotropo, mostrato in Fig. 3.1.3.

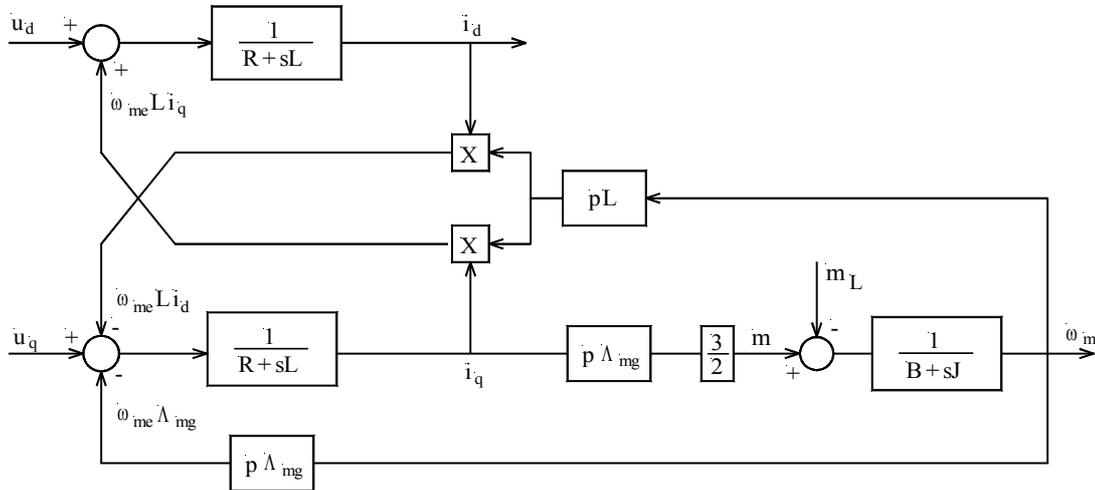


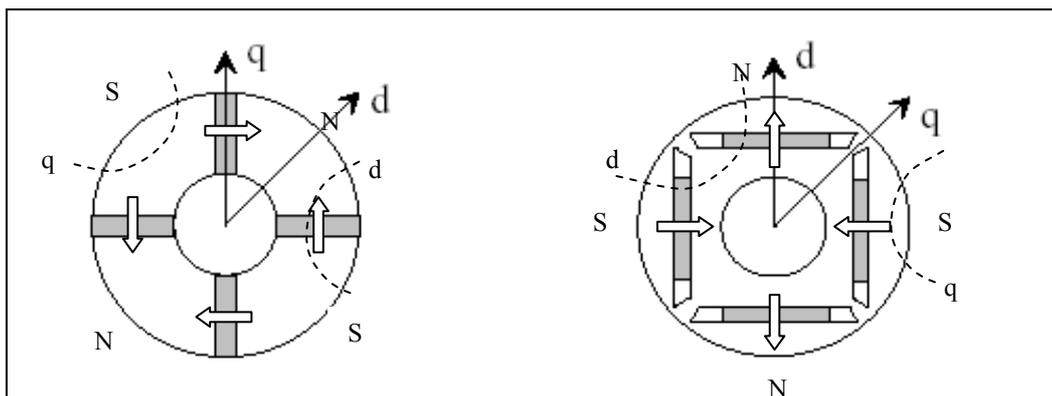
Fig.3.1.3 - Schema a blocchi del motore sincrono a magneti permanenti isotropo

In esso compaiono elementi non lineari, quali i moltiplicatori. I blocchi che rappresentano funzioni lineari sono stati invece espressi tramite la loro funzione di trasferimento ingresso-uscita. Si noti il accoppiamento incrociato tra gli assi d e q, espresso dalle quantità  $\omega_{me} L i_d$  e  $\omega_{me} L i_q$ , che indicano come la tensione  $u_d$ , agendo su  $i_d$ , interferisca con l'azione di  $u_q$  nel determinare la corrente  $i_q$  e viceversa. Per un controllo efficace occorrerà, come descritto in dettaglio nei paragrafi successivi, effettuare un *disaccoppiamento* tra i due canali di tensione.

## 5.2 - Estensione al motore sincrono a magneti permanenti anisotropo

I motori sincroni a magnete permanente anisotropi hanno una struttura di rotore o una disposizione dei magneti permanenti tale da presentare una marcata anisotropia magnetica, che porta ad alcune modifiche delle equazioni ricavate nel par. 5.1.

La *conversione elettromeccanica* attuata dai motori anisotropi segue ora il doppio principio dei sistemi elettrodinamici e dei sistemi a riluttanza, e la coppia da loro generata risulta essere la somma di queste due componenti. Due rappresentazioni schematiche della possibile struttura di rotore anisotropo a quattro poli sono mostrate in Fig.5.2.1 (*rotori IPM, Interior Permanent Magnet*). I magneti sono disegnati con rettangoli grigi e l'indicazione del verso di magnetizzazione è riportata con frecce contornate. I magneti determinano sulla superficie del rotore due polarità nord (N) e due sud (S).



(a) (b)  
Fig. 5.2.1 - Rappresentazioni schematiche di rotori anisotropi a quattro poli

La figura mostra anche una coppia di assi ortogonali (in termini di angoli elettrici) d (asse polare) e q (asse interpolare. Avendosi  $p=2$  l'angolo geometrico fra gli assi d e q è di  $45^\circ$ . Girando attorno al rotore si incontrano (non disegnati in figura) due vertici e due code sia per l'asse d che per l'asse q.

La foto sottostante riporta un rotore (a sinistra) e uno statore (a destra) di un motore sincrono a magneti permanenti con rotore anisotropo del tipo di Fig. 4.2.1 (b).



La distribuzione degli avvolgimenti statorici (e secondariamente la sagomatura dei magneti) consentono, come nel caso di motore isotropo, di ritenere sinusoidali i flussi concatenati  $\lambda_{a,mg}$ ,  $\lambda_{b,mg}$ ,  $\lambda_{c,mg}$ , così che le relazioni (5.1.2) e (5.1.3) mantengono la loro validità.

Non sono valide invece le successive considerazioni del par. 5.1; in particolare le auto e mutue induttanze delle fasi statoriche sono ora funzioni della posizione rotorica. Una trattazione rigorosa che tenga conto di questa peculiarità porterebbe alle seguenti equazioni nel sistema di riferimento rotante sincrono con il rotore

$$\begin{aligned} u_d &= R i_d + L_d \frac{di_d}{dt} - \omega_{me} L_q i_q \\ u_q &= R i_q + L_q \frac{di_q}{dt} + \omega_{me} L_d i_d + \omega_{me} \Lambda_{mg} \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

ove è definita l'induttanza sincrona diretta  $L_d$  percorsa dalla corrente diretta  $i_d$  e l'induttanza sincrona in quadratura  $L_q$  percorsa dalla corrente in quadratura  $i_q$ .

La corrente diretta  $i_d$  produce un campo magnetico il cui asse di azione è l'asse diretto ovvero l'asse polare. Il circuito magnetico eccitato dalla corrente diretta include pertanto i magneti permanenti secondo linee del tipo "d" in Fig.5.2.1. La corrente diretta  $i_q$  produce invece un campo magnetico il cui asse di azione è l'asse in quadratura ovvero l'asse interpolare. Il circuito magnetico eccitato dalla corrente in quadratura non include pertanto i magneti permanenti, ma si sviluppa secondo linee del tipo "q" in Fig.5.2.1. Si comprende pertanto come le due induttanze  $L_d$  e  $L_q$  seppur costanti risultino diverse per le differenti riluttanze cui si riferiscono ed in particolare per i rotori di Fig. 5.2.1 sarà  $L_d < L_q$ .

Le componenti della tensione secondo gli assi diretto ed in quadratura hanno quindi un'espressione sostanzialmente equivalente alla (5.1.20), ricavata per il motore isotropo, quando in quest'ultima si sostituisca opportunamente alla induttanza sincrona  $L$  le induttanze sincrone d'asse diretto ed in quadratura.

Come nel par. 5.1, le espressioni (5.2.1) consentono di tracciare il bilancio energetico nel sistema di riferimento sincrono, per ricavare un'espressione per la coppia meccanica sviluppata dal motore. Anche in questo caso, si moltiplichino ambo i membri delle (5.2.1) rispettivamente per  $i_d dt$ ,  $i_q dt$ . Sommando membro a membro le tre equazioni si ottiene:

$$(u_d i_d + u_q i_q) dt = R(i_d^2 + i_q^2) dt + L_d i_d di_d + L_q i_q di_q + \omega_{me} (\Lambda_{mg} i_q + (L_d - L_q) i_d i_q) dt \quad (5.2.2)$$

Considerazioni del tutto analoghe a quelle svolte nel par. 5.1 portano a scrivere la seguente equazione per la coppia sviluppata dal motore:

$$m = \frac{3}{2} p \Lambda_{mg} i_q + \frac{3}{2} p (L_d - L_q) i_d i_q \quad (5.2.3)$$

Rispetto all'espressione (5.1.22) ricavata nel caso di motore isotropo si verifica, come anticipato all'inizio, la presenza di un ulteriore termine, detto *coppia di riluttanza*.

Dalle equazioni (5.2.1), (5.2.3), e (5.1.23) che rappresenta il carico meccanico si può infine tracciare lo schema a blocchi per il motore sincrono a magneti permanenti di tipo anisotropo, che appare molto simile a quello di Fig. 5.2.2:

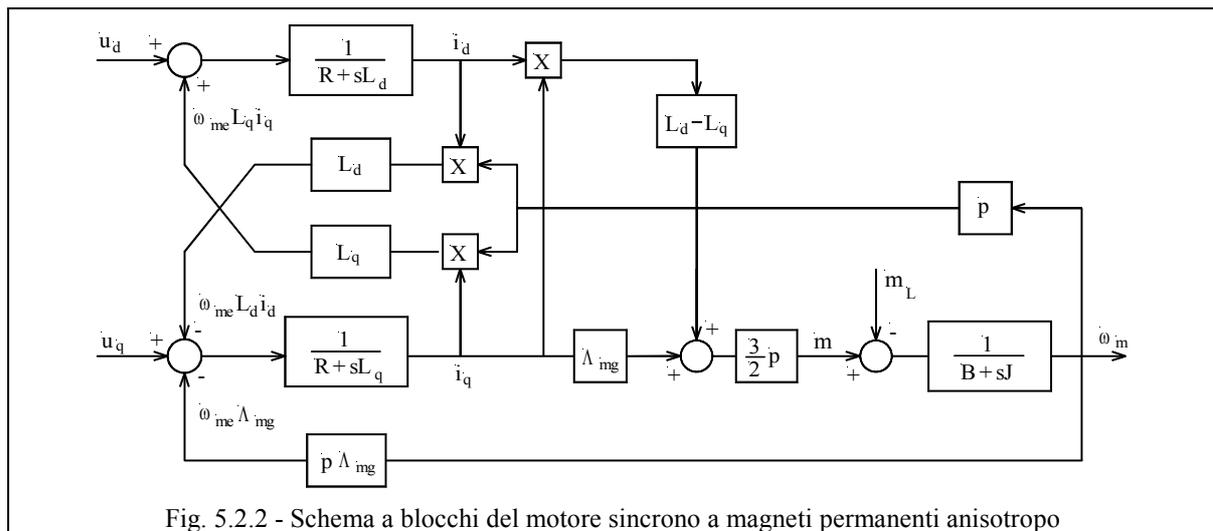


Fig. 5.2.2 - Schema a blocchi del motore sincrono a magneti permanenti anisotropo

### 5.3 – Limiti e regioni di funzionamento del motore brushless

Le tensione e le correnti che possono essere applicate al motore devono rimanere entro specifici limiti che, da un lato, sono costituiti dai valori nominali o di targa del motore (oltre i quali i suoi avvolgimenti risulterebbero eccessivamente sollecitati per un corretto e prolungato funzionamento), dall'altro sono costituiti dagli analoghi valori nominali del sistema di alimentazione. Qui di seguito si assumerà che le due limitazioni coincidano.

Per determinare i corrispondenti limiti e le regioni di funzionamento del motore si considera il suo funzionamento a regime. Si intende funzionamento a regime quello in cui le tensioni e correnti di ogni fase sono sinusoidali nel tempo con ampiezza e frequenza costanti, mentre la velocità  $\omega$  è

costante e pari a  $\Omega$ . Costanti sono pure le grandezze elettriche trasformate in un sistema di riferimento rotante sincrono con il rotore, indicate con  $U_d$ ,  $U_q$ ,  $I_d$  ed  $I_q$  rispettivamente.

Per soddisfare le limitazioni la corrente di ciascuna fase di statore dovrà avere ampiezza in valore efficace non superiore al valore nominale  $I_{nom}$ , riportato sui dati di targa del motore, oltre il quale le perdite Joule che si producono nel circuito statorico porterebbero la temperatura di regime di questo componente ad assumere valori inaccettabili per i materiali isolanti ivi presenti.

Solo per brevi intervalli di tempo si ammettono correnti maggiori della nominale (funzionamento in *sovraccarico*), sfruttando l'inerzia termica del rotore, fino al limite di corrente specificata per il *funzionamento intermittente*. Tale sovraccarico non può comunque superare il valore della *corrente di smagnetizzazione* oltre il quale la forza magnetometrica delle correnti statoriche determina una smagnetizzazione irreversibile dei magneti permanenti posti sul rotore; anche il *limite di smagnetizzazione* fa pure parte dei dati di targa del motore.

Anche la tensione di statore deve rimanere entro il suo valore nominale  $U_{nom}$ , che dipende dai criteri di isolamento e dal dimensionamento elettromagnetico del motore. I dati di targa si riferiscono di norma al valore nominale della tensione efficace concatenata.

In sintesi il limite di funzionamento a regime per la corrente si potrà esprimere comodamente in funzione delle correnti trasformate  $I_d$  ed  $I_q$  con la:

$$I_d^2 + I_q^2 \leq I_N^2 \quad (5.3.1)$$

ove  $I_N$  rappresenta il modulo del vettore spaziale delle correnti statoriche corrispondente alla corrente nominale efficace di fase  $I_{nom}$ . Per le matrici di trasformazione usate vale  $I_N = \sqrt{2}I_{nom}$ . Analogamente, il limite di corrente sarà

$$U_d^2 + U_q^2 \leq U_N^2 \quad (5.3.2)$$

ove  $U_N$  rappresenta il modulo del vettore spaziale delle tensioni statoriche corrispondente alla tensione nominale efficace concatenata  $U_{nom}$ . Per le matrici di trasformazione usate vale  $U_N = \sqrt{2}U_{nom}/\sqrt{3}$ .

**5.3.1 Motore con rotore isotropo** - Si consideri un motore sincrono a magneti permanenti con rotore isotropo. Le tensioni che compaiono nella (5.3.2) si ricavano dalle (5.1.20) assumendo valori costanti di tensione e di corrente (soluzione a regime) e risultano espresse da

$$\begin{aligned} U_d &= RI_d - \Omega_{me} LI_q \\ U_q &= RI_q + \Omega_{me} LI_d + \Omega_{me} \Lambda_{mg} \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

Le (5.3.3) possono essere sostituite nella (5.3.2) per esprimere il limite di tensione in funzione delle correnti. Nel fare ciò si può trascurare la caduta di tensione resistiva, sempre piccola rispetto alla tensione nominale, giungendo a:

$$(\Omega_{me} LI_q)^2 + (\Omega_{me} LI_d + \Omega_{me} \Lambda_{mg})^2 \leq U_N^2 \quad (5.3.4)$$

Infine la (5.3.4) si può riordinare nella seguente forma

$$\left(I_d + \frac{\Lambda_{mg}}{L}\right)^2 + I_q^2 \leq \frac{U_N^2}{\Omega_{me}^2 L^2} \quad (5.3.5)$$

I limiti di corrente (5.3.1) e di tensione (5.3.5) sopra esposti producono corrispondenti limiti di coppia e di velocità. Tutto ciò può essere studiato ed evidenziato con l'ausilio di un piano  $I_d$ - $I_q$ , sul quale si possono facilmente tracciare i luoghi *limite di corrente* e *limite di tensione* per diverse velocità.

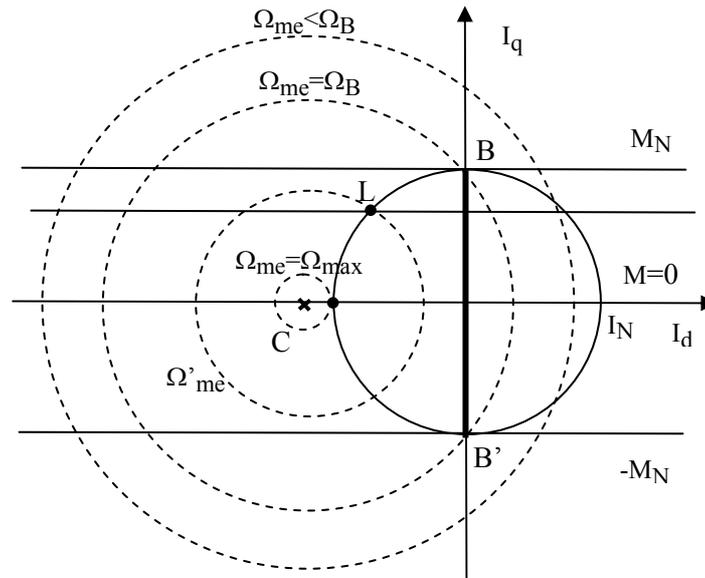


Fig. 5.3.1 – Limiti di funzionamento del motore brushless isotropo

Per quanto riguarda il limite di corrente (5.3.1) si riconosce che esso definisce nel piano  $I_d$ - $I_q$  un'area circolare di raggio  $I_N$ , mostrata in tratto continuo sulla Fig. 5.3.1.

Il limite di tensione (5.3.5) descrive una famiglia di cerchi concentrici il raggio di ciascuna delle quali dipende dal reciproco della velocità (meccanica elettrica, pari alla velocità di rotazione dei vettori spaziali a regime e quindi alla pulsazione delle grandezze sinusoidali di statore).

Il centro  $C$  delle circonferenze ha coordinate

$$\begin{aligned} I_{Cd} &= -\frac{\Lambda_{mg}}{L} \\ I_{Cq} &= 0 \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

che sono le correnti  $d$  e  $q$  del motore con i terminali in corto circuito mentre è mantenuto in rotazione<sup>9</sup>. In pratica la corrente di corto circuito è solitamente maggiore (anche di molto) della corrente nominale della macchina e pertanto il centro  $C$  è esterno alla circonferenza limite di corrente, come nella Fig. 5.3.1. Sulla stessa Fig. 5.3.1 sono riportati i luoghi a coppia costante (*curve isocoppia*) che, per la (5.1.22), sono rette orizzontali.

<sup>9</sup> Le (3.3.6) si ottengono dalle (3.3.3) poste uguali a zero le tensioni e trascurando le cadute resistive. Si osservi che le componenti della corrente di corto circuito (3.3.6), e quindi l'ampiezza della stessa corrente di corto circuito, non dipendono dalla velocità di rotazione. Ciò è vero per velocità non troppo piccole, cioè fino a che è trascurabile la resistenza statorica rispetto alla reattanza sincrona.

Sulla Fig. 5.3.1 si riconosce il segmento BB', luogo dei punti di tangenza fra le rette isocoppia e diversi limiti di corrente. Il segmento rappresenta pertanto l'insieme dei punti di lavoro per i quali si manifesta il *massimo rapporto coppia su corrente* (in terminologia anglosassone: *Max Torque Per Amps – MTPA*). Nel punto B si ha la coppia nominale positiva; in B' la stessa coppia di segno negativo.

Il funzionamento del motore, ad una data velocità di lavoro, nel rispetto dei limiti di tensione e di corrente corrisponde ad un punto di lavoro interno sia al limite di corrente che al limite di tensione corrispondente a quella velocità di lavoro. Per basse velocità di funzionamento, il limite di tensione è molto ampio (il raggio delle circonferenze tende all'infinito per la velocità che tende a zero) e pertanto è più restrittivo il limite di corrente. In tali condizioni appare conveniente far funzionare il motore in un punto del segmento BB', a seconda della coppia che si deve produrre, ma in ogni caso assicurando per quella coppia la minima corrente assorbita (massimo rapporto coppia su corrente) e minime perdite. Ciò si può attuare fino a che il segmento BB' è interno al limite di tensione ovvero fino alla velocità  $\Omega_{me} = \Omega_B$  per la quale la corrispondente circonferenza che esprime il limite di tensione passa per i punti B e B'.  $\Omega_B$  rappresenta quindi la *velocità base* del motore (dell'azionamento) al di sotto della quale è sempre disponibile la coppia nominale (*regione di funzionamento a coppia disponibile costante*) come mostrato in Fig. 5.3.2.

La Fig. 5.3.2 rappresenta la sola regione di funzionamento del primo quadrante, ma essa va immaginata copiata in modo speculare anche negli altri tre.

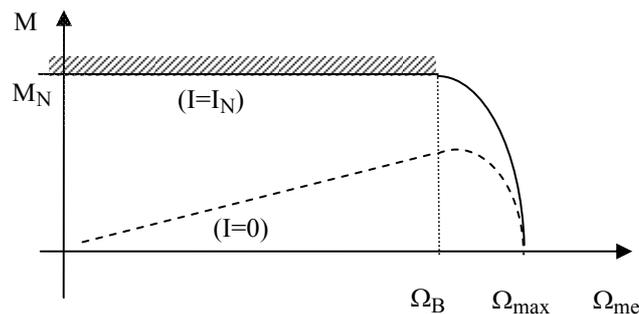


Fig. 5.3.2 – Regioni di funzionamento del motore brushless isotropo (a tratteggio la curva della potenza limite (diponibile))

A tratteggio è mostrata la curva della potenza limite (potenza disponibile a ciascuna velocità) ottenuta moltiplicando la velocità per la corrispondente coppia limite. Alla velocità base si ha una potenza disponibile pari alla potenza nominale del motore. Si riconosce che oltre la velocità base la potenza è ancora crescente, fino ad un punto di massimo che corrisponde al funzionamento a fattore di potenza unitario, e poi decresce per andare a zero alla velocità massima ove non si ha più coppia.

Il valore della velocità base si calcola imponendo alla (5.3.5) di essere soddisfatta per  $I_d=0$  e  $I_q=I_N$  ottenendo

$$\Omega_B = \frac{U_N}{\sqrt{\Lambda_{mg}^2 + (LI_N)^2}}$$

Se  $LI_N \ll \Lambda_{mg}$ , l'espressione della velocità base si può approssimare con la:

$$\Omega_B \approx \frac{U_N}{\Lambda_{mg} + \frac{LI_N}{2}}$$

La coppia nominale positiva si ha con il funzionamento del motore a corrente nominale nel punto B del piano  $I_d$ - $I_q$ ; la coppia nulla, operando nell'origine degli assi dello stesso piano, con corrente nulla.

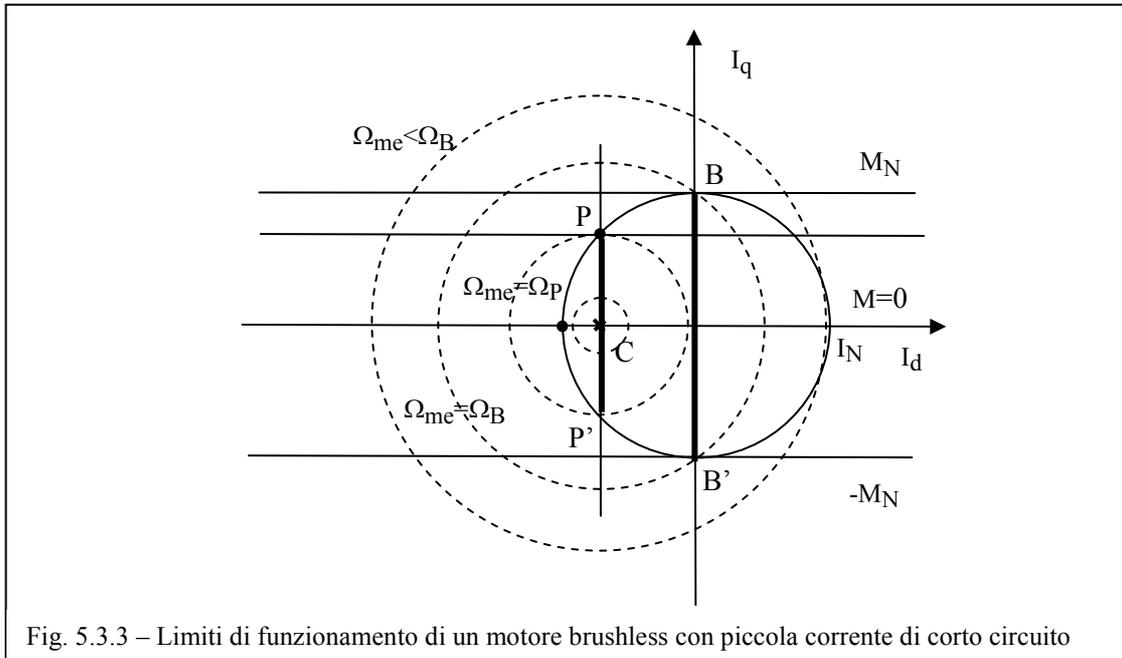


Fig. 5.3.3 – Limiti di funzionamento di un motore brushless con piccola corrente di corto circuito

Per velocità superiori alla velocità base l'area dei punti di lavoro ammissibili, entro sia il limite di tensione che quello di corrente, non contiene più l'intero segmento  $BB'$ . La massima coppia si ottiene nel punto di lavoro definito dall'intersezione fra la circonferenza limite di corrente e quella limite di tensione, come il punto L in Fig. 5.3.1 con riferimento alla velocità  $\Omega'_{me}$ . Tale coppia massima disponibile è inferiore alla coppia nominale e cala rapidamente al crescere della velocità per annullarsi quando la velocità raggiunge il valore  $\Omega_{max}$  al quale i limiti di tensione e di corrente si toccano in un solo punto posto sull'asse della  $I_d$ . La regione di funzionamento nel piano coppia-velocità appare quindi come in Fig. 5.3.2.

La velocità massima si può valutare imponendo il soddisfacimento della (5.3.5), con il segni di uguaglianza, nelle condizioni  $I_q=0$ ,  $I_d = -I_N$ . Si ottiene

$$\Omega_{max} = \frac{U_N}{\Lambda_{mg} - LI_N} \quad (5.3.7)$$

Nei normali motori brushless commerciali la velocità massima è poco maggiore della velocità base (circa 10-20% maggiore). Per incrementare la velocità massima si deve aumentare  $L$ , come si riconosce dalla (5.3.7), mediante induttanze esterne al motore o con una progettazione speciale del motore stesso. L'aumento di  $L$  determina comunque anche una riduzione della velocità base.

La velocità massima tende all'infinito quando il denominatore della (5.3.7) va a zero, ovvero quando la corrente di cortocircuito è pari alla corrente nominale (cfr. (5.3.6) e il centro  $C$  delle circonferenze limite di tensione cade sulla circonferenza limite di corrente.

Per correnti di cortocircuito ancora più piccole si cade nella situazione illustrata dalla Fig. 5.3.3. nel quale il centro C delle circonferenze limite di tensione risiede all'interno della circonferenza limite di corrente.

Lo sfruttamento del motore segue in questo caso gli stessi criteri precedentemente visti fino alla velocità  $\Omega_P$  per la quale il punto di intersezione fra le circonferenze limite di tensione e corrente cade sulla verticale del punto C. Per velocità superiori a  $\Omega_P$  la maggior coppia disponibile si ottiene operando lungo il segmento PP' che, in analogia al segmento BB', è il luogo dei punto che assicurano il *massimo rapporto coppia su tensione* (in terminologia anglosassone: *Max Torque Per Volts – MTPV*).

Si riconosce che in questo caso non esiste un limite massimo di velocità: il punto C, mezzaria del segmento PP' si raggiunge con velocità infinita e pertanto le regioni di funzionamento sul piano coppia-velocità di questo tipo di motore appare come in Fig. 5.3.4.

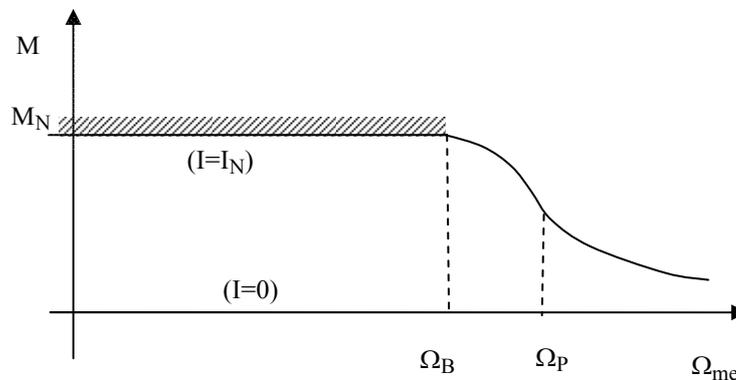


Fig. 5.3.4 – Regioni di funzionamento del motore brushless isotropo di Fig 3.3.3

Il valore della velocità meccanica-elettrica del punto P si calcola imponendo alla (5.3.5) di essere soddisfatta per  $I_d=I_{Cd}$  e  $I_q=\sqrt{I_N^2 - I_{Cd}^2}$  ottenendo

$$\Omega_P = \frac{U_N}{\sqrt{(LI_N)^2 - \Lambda_{mg}^2}}$$

**5.3.2 Motore con rotore anisotropo** - Si consideri ora un motore sincrono a magneti permanenti con rotore anisotropo. Le tensioni che compaiono nella (5.3.2) si ricavano dalle (5.2.1) assumendo valori costanti di tensione e di corrente (soluzione a regime) e risultano espresse da

$$\begin{aligned} U_d &= RI_d - \Omega_{me} L_q I_q \\ U_q &= RI_q + \Omega_{me} L_d I_d + \Omega_{me} \Lambda_{mg} \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

Le (5.3.8) possono essere sostituite nella (5.3.2) per esprimere il limite di tensione in funzione delle correnti. Nel fare ciò si può trascurare la caduta di tensione resistiva, sempre piccola rispetto alla tensione nominale, giungendo a:

$$(\Omega_{me} L_q I_q)^2 + (\Omega_{me} L_d I_d + \Omega_{me} \Lambda_{mg})^2 \leq U_N^2 \quad (5.3.9)$$

Infine la (5.3.9) si può riordinare nella seguente forma

$$\left(I_d + \frac{\Lambda_{mg}}{L_d}\right)^2 + \left(\frac{L_q}{L_d} I_q\right)^2 \leq \frac{U_N^2}{\Omega_{me}^2 L^2} \quad (5.3.10)$$

I limiti di corrente (5.3.1) e di tensione (5.3.10) sopra esposti producono corrispondenti limiti di coppia e di velocità. Tutto ciò può essere studiato ed evidenziato con l'ausilio di un piano  $I_d$ - $I_q$ , sul quale si possono facilmente tracciare i luoghi *limite di corrente* e *limite di tensione* per diverse velocità.

Per quanto riguarda il limite di corrente (5.3.1) si riconosce che esso rappresenta nel piano  $I_d$ - $I_q$  una circonferenza di raggio  $I_N$ , mostrata in tratto continuo sulla Fig. 5.3.5.

Il limite di tensione (5.3.10) descrive una famiglia di ellissi concentriche gli assi di ciascuna delle quali dipendono dal reciproco della velocità (meccanica elettrica, pari alla velocità di rotazione dei vettori spaziali a regime e quindi alla pulsazione delle grandezze sinusoidali di statore).

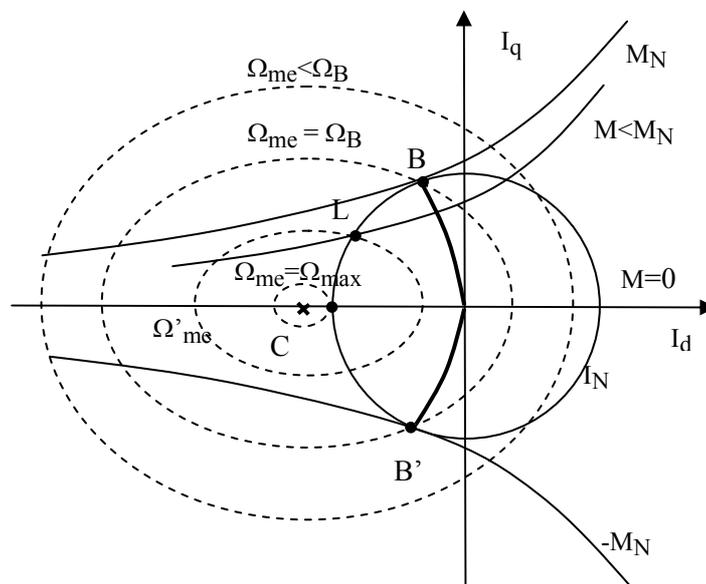


Fig. 5.3.5 – Limiti di funzionamento del motore brushless isotropo

Il centro C delle ellissi ha coordinate

$$I_{Cd} = \frac{\Lambda_{mg}}{L_d} \quad (5.3.11)$$

$$I_{Cq} = 0$$

che sono ancora le correnti d e q del motore con i terminali in corto circuito mentre è mantenuto in rotazione. Nelle macchine anisotrope ancora la corrente di corto circuito può essere maggiore o minore della corrente nominale della macchina. In questo caso la seconda possibilità è più frequente. Quando la corrente di corto circuito ha livello maggiore della corrente nominale (corrente limite), allora il centro C è esterno alla circonferenza limite di corrente, come nella Fig. 5.3.5.

Sulla stessa Fig. 5.3.5 sono riportati i luoghi a coppia costante (*curve isocoppia*) che, per la (5.2.3), sono iperboli con asintoti rispettivamente l'asse orizzontale e la retta verticale  $I_d = \Lambda_{mg} / (L_q - L_d)$ . A tale risultato si perviene facilmente prendendo in esame la (5.2.3) e risolvendola, per ogni prefissato valore della coppia, per la corrente  $I_q$  in funzione della  $I_d$ . Ciò porta a:

$$I_q = \frac{2}{3p} \frac{M}{\Lambda_{mg} + (L_d - L_q)I_d}$$

che è l'espressione cercata delle curve isocoppia.

Per ogni valore di  $M$  si hanno due rami di iperbole, uno a destra e uno a sinistra dell'asintoto verticale. Il ramo di interesse è, ovviamente, quello a sinistra (nel semipiano ove è collocata l'origine del piano) perché consente di ottenere la stessa coppia con minor corrente.

Sulla Fig. 5.3.5 è mostrata la curva  $BB'$ , luogo dei punti di tangenza fra le iperboli isocoppia e diversi limiti di corrente. La curva rappresenta ancora l'insieme dei punti di lavoro per i quali si manifesta il *massimo rapporto coppia su corrente* (luogo MTPA). Nel punto  $B$  si ha la coppia nominale positiva; in  $B'$  la stessa coppia di segno negativo.

L'espressione del luogo MTPA, si ottiene imponendo l'ortogonalità della rete tangente la curva isocoppia in un dato punto con la retta che congiunge quel punto all'origine del piano. La retta tangente ha coefficiente angolare  $m_1$  data dalla derivata dell'espressione della curva isocoppia che risulta:

$$\frac{dI_q}{dI_d} = \frac{I_q(L_q - L_d)}{\Lambda_{mg} + (L_d - L_q)I_d}$$

mentre la retta uscente dall'origine ha coefficiente angolare  $m_2 = I_q/I_d$ . La condizione di ortogonalità si esprime imponendo  $m_1 = -1/m_2$  che porta all'espressione cercata per il luogo MTPA data dalla:

$$I_q = \pm \sqrt{\frac{I_d[\Lambda_{mg} + (L_d - L_q)I_d]}{(L_q - L_d)}}$$

ove il segno positivo vale per coppie positive e viceversa.

Il funzionamento del motore, ad una data velocità di lavoro, nel rispetto dei limiti di tensione e di corrente corrisponde ad un punto di lavoro interno sia al limite di corrente che al limite di tensione che corrisponde a quella velocità di lavoro. Per basse velocità di funzionamento, il limite di tensione è molto ampio (gli assi delle ellissi tendono all'infinito per la velocità che tende a zero) e pertanto è più restrittivo il limite di corrente. In tali condizioni appare conveniente far funzionare il motore in un punto del luogo  $BB'$ , a seconda della coppia che si deve produrre, ma in ogni caso assicurando per quella coppia la minima corrente assorbita (*massimo rapporto coppia su corrente*) e minime perdite. Ciò si può attuare fino a che il luogo  $BB'$  è interno al limite di tensione ovvero fino alla velocità  $\Omega_{me} = \Omega_B$  per la quale la corrispondente ellisse che esprime il limite di tensione passa per i punti  $B$  e  $B'$ .  $\Omega_B$  rappresenta quindi la *velocità base* del motore (dell'azionamento) al di sotto della quale è sempre disponibile la coppia nominale (*regione di funzionamento a coppia disponibile costante*) come già mostrato in Fig. 5.3.2. La figura rappresenta la sola regione di funzionamento del primo quadrante, ma essa va immaginata copiata in modo speculare anche negli altri tre quadranti.

La coppia nominale positiva si ha con il funzionamento del motore a corrente nominale nel punto  $B$ ; la coppia nulla, operando nell'origine degli assi, con corrente nulla.

Per velocità superiori alla velocità base l'area dei punti di lavoro ammissibili, contenuta sia nel limite di tensione che in quello di corrente, non contiene più l'intero luogo  $BB'$ . La massima coppia si ottiene nel punto di lavoro definito dall'intersezione fra la circonferenza limite di corrente e quella limite di tensione, come il punto L in Fig. 5.3.5 con riferimento alla velocità  $\Omega'_{me}$ . Tale coppia massima disponibile è inferiore alla coppia nominale e cala rapidamente al crescere della velocità per annullarsi quando la velocità raggiunge il valore  $\Omega_{max}$  al quale i limiti di tensione e di corrente si toccano in un solo punto posto sull'asse della  $I_d$ . La regione di funzionamento nel piano coppia-velocità appare quindi come in Fig. 5.3.2.

La velocità massima si può valutare imponendo il soddisfacimento della (5.3.10), con il segni di uguaglianza, nelle condizioni  $I_q=0$ ,  $I_d = -I_N$ . Si ottiene

$$\Omega_{max} = \frac{U_N}{\Lambda_{mg} - L_d I_N} \quad (5.3.12)$$

I motori brushless con rotore anisotropo sono in genere realizzati per esibire un'ampia regione di funzionamento con velocità superiori alla velocità base. Allo scopo essi sono spesso progettati per avere una corrente di corto circuito minore della corrente nominale e quindi un centro delle ellissi limite di tensione contenuto nella circonferenza limite di corrente. Nel caso particolare dei *motori sincroni a riluttanza*, che non fanno uso di magneti permanenti e che sfruttano la sola coppia di riluttanza, il citato centro delle ellissi coincide con l'origine dl piano  $I_d$ - $I_q$ .

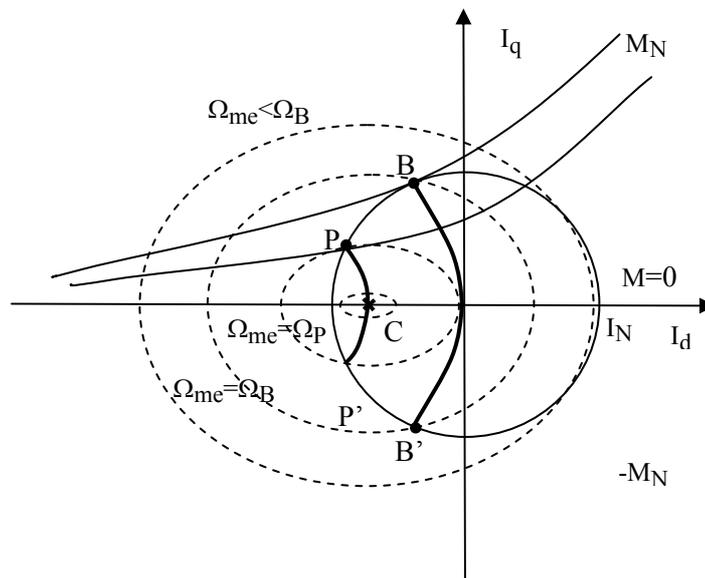


Fig. 5.3.6 – Limiti di funzionamento di un motore brushless con piccola corrente di corto circuito

Con correnti di cortocircuito più piccole della nominale si cade nella situazione illustrata dalla Fig. 5.3.6. nel quale il centro C delle ellissi limite di tensione si colloca all'interno della circonferenza limite di corrente.

Lo sfruttamento del motore segue in questo caso gli stessi criteri precedentemente visti fino alla velocità  $\Omega_P$  per la quale il punto di intersezione fra le ellissi limite di tensione e corrente è anche punto tangente fra le ellissi e le iperboli isocoppia. Per velocità superiori a  $\Omega_P$  la maggior coppia

disponibile si ottiene operando lungo il luogo PP' che, in analogia alla curva BB', è il luogo dei punti che assicurano il *massimo rapporto coppia su tensione* (luogo MTPV).

Con procedimento simile a quello svolto per trovare l'espressione del luogo MTPA, si può calcolare l'espressione del luogo MTPA. Allo scopo di deve operare dapprima una traslazione delle curve lungo l'asse d in modo che il centro delle ellissi carichi nell'origine dei nuovi assi e quindi un cambio di scala dell'asse q sostituendo  $I_q$  con  $I'_q = I_q L_q / L_d$ . In questo modo i limiti di tensione diventano circonferenze centrate nell'origine (traslata) e le curve isocoppia rimangono delle iperboli e ciò consente di applicare esattamente la procedura usata per ricavare il luogo MTPA.

Procedimento alternativo (applicabile anche per ricavare il luogo MTPA), consiste nell'uguagliare nello stesso punto (punto di tangenza) le pendenze delle curve isocoppia e delle ellissi limite di tensione. Con l'uno o con l'altro dei metodi si perviene all'espressione del luogo MTPV:

$$I_q = \pm \frac{L_d}{L_q} \sqrt{\frac{-\left(I_d + \frac{\Lambda_{mg}}{L_d}\right) [\Lambda_{mg} + (L_d - L_q) I_d]}{(L_q - L_d)}}$$

Si riconosce che in questo caso non esiste un limite massimo di velocità: il punto C si raggiunge con velocità infinita e pertanto le regione di funzionamento sul piano coppia-velocità di questo tipo di motore appare come quella di Fig. 5.3.4.

Un caso particolare di macchina con rotore anisotropo è quello della macchina sincrona a riluttanza la quale presenta un rotore anisotropo privo di magneti permanenti (e di avvolgimenti di eccitazione). In questo caso la corrente di cortocircuito è nulla (cfr. (5.3.6)) e pertanto il centro delle ellissi limite di tensione si trova nell'origine del piano). Per il luogo MTPA ha in questo caso la semplice espressione (basta porre  $\Lambda_{mg}=0$  nell'espressione generale):

$$I_q = \pm I_d$$

con  $I_d < 0$  e il segno positivo per il funzionamento da motore, mentre il luogo MTPV diventa:

$$I_q = \pm \frac{L_d}{L_q} I_d$$

La Fig. 5.3.7 riporta il diagramma polare del motore sincrono a riluttanza appena descritto.

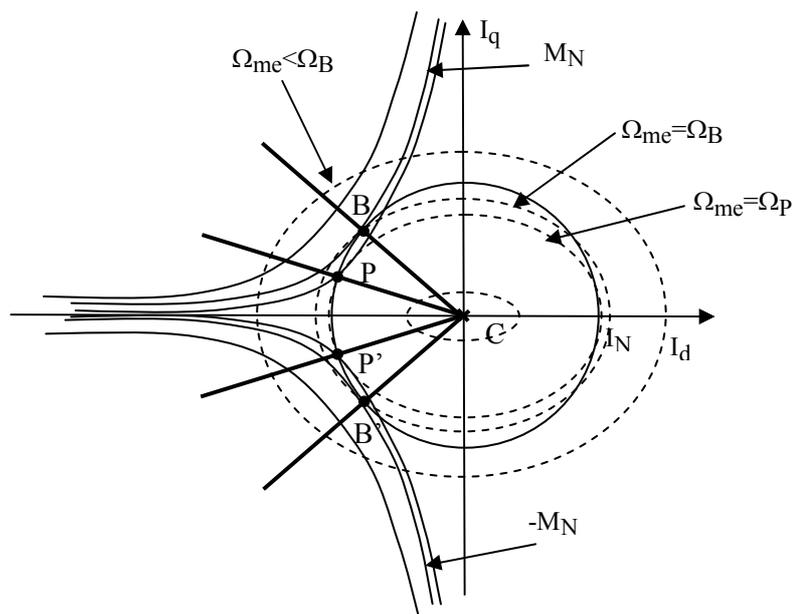


Fig. 5.3.7 – Limiti di funzionamento di un motore sincrono a riluttanza

È importante ricordare tuttavia che nel caso dei motori a riluttanza (o meglio, in particolare per essi), l'effetto della saturazione del ferro non è trascurabile. Le curve isocoppia e i luoghi a tensione costante differiscono pertanto da quelli analiticamente ricavati in precedenza e descritti nella Fig. 5.3.7, che ha quindi valore qualitativo.

#### 5.4 – Comportamento reale del motore sincrono a magneti permanenti

Vi sono diversi motivi che rendono il comportamento reale della macchina sincrona a magneti permanenti diverso da quello ideale appena descritto. Si descrivono qui gli effetti dovuti alla saturazione magnetica dei percorsi in ferro.

##### 5.4.1 Saturazione del ferro

In presenza di saturazione del ferro le relazioni flusso concatenato-corrente (caratteristiche magnetiche), per uno e per l'altro dei due assi, non sono più lineari (espresse da coefficienti (induttanze) costanti), ma assumono forme più complesse, con effetti anche incrociati della corrente di un asse sul flusso dell'altro (saturazione incrociata, cross saturation). Assumendo al momento trascurabile quest'ultimo fenomeno, le caratteristiche magnetiche dovranno essere scritte nella forma:

$$\begin{cases} \lambda_d = \lambda_d(i_d) = \Lambda_{mg} + \lambda_{di}(i_d) \\ \lambda_q = \lambda_q(i_q) \end{cases} \quad (5.4.1)$$

ove si è supposta la possibile presenza del magnete permanente sull'asse d il cui flusso concatenato è identificato con il flusso a vuoto dell'asse in questione:  $\Lambda_{mg} = \lambda_d(0)$ .

Con riferimento ad un motore il cui rotore a magneti interni ha la configurazione di Fig. 5.4.1, le caratteristiche magnetiche misurate assumono gli andamenti di Fig. 5.4.2.

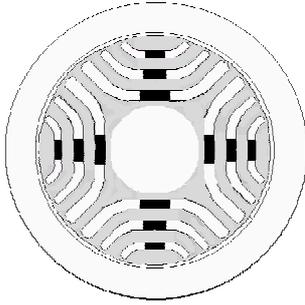


Fig. 5.4.1 – Configurazione rotorica di un motore IPM

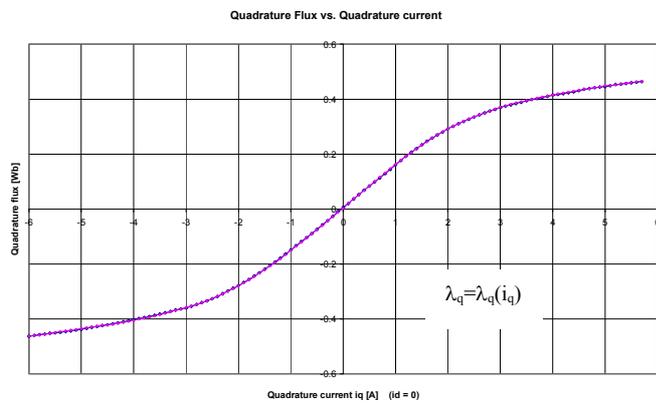
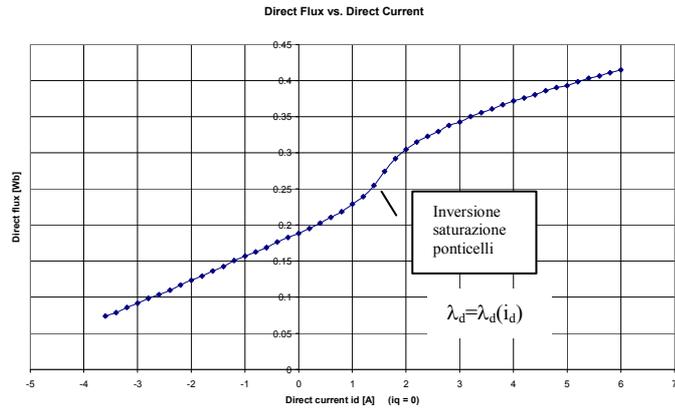


Fig. 5.4.2 – Caratteristiche magnetiche del motore IPM di Fig. 5.4.1

In presenza di saturazione del ferro le equazioni tensione corrente della macchina sincrona a magneti permanenti vanno aggiornate nel modo seguente. A partire dalle equazioni, sempre valide, nel sistema di riferimento rotante, sincrono con il rotore<sup>10</sup>:

$$u_d(t) = Ri_d(t) + \frac{d\lambda_d(i_d(t))}{dt} - \omega_{me}\lambda_q(i_q(t))$$

$$u_q(t) = Ri_q(t) + \frac{d\lambda_q(i_q(t))}{dt} + \omega_{me}\lambda_d(i_d(t))$$

si può scrivere

$$u_d(t) = Ri_d(t) + \frac{d\lambda_d(i_d)}{di_d} \frac{di_d(t)}{dt} - \omega_{me}\lambda_q(i_q(t)) = Ri_d(t) + \tilde{L}_d(i_d) \frac{di_d(t)}{dt} - \omega_{me}L_q(i_q)i_q(t)$$

$$u_q(t) = Ri_q(t) + \frac{d\lambda_q(i_q)}{di_q} \frac{di_q(t)}{dt} + \omega_{me}\lambda_d(i_d(t)) = Ri_q(t) + \tilde{L}_q(i_q) \frac{di_q(t)}{dt} + \omega_{me}L_d(i_d)i_d(t) + \omega_{me}\Lambda_{mg}$$

ove si sono definite le *induttanze differenziali*:

<sup>10</sup> Si omette per semplicità la scrittura l'apice "r" per denotare che le grandezze sono definite nel sistema di riferimento rotante sincrono con il rotore.

$$\tilde{L}_d(i_d) = \frac{d\lambda_d(i_d)}{di_d}$$

$$\tilde{L}_q(i_q) = \frac{d\lambda_q(i_q)}{di_q}$$

che rappresentano la pendenza delle caratteristiche magnetiche in ogni punto, e le *induttanze apparenti*:

$$L_d(i_d) = \frac{\lambda_d(i_d) - \Lambda_{mg}}{i_d}$$

$$L_q(i_q) = \frac{\lambda_q(i_q)}{i_q}$$

che sono invece le pendenze delle rette che collegano il punto in esame della caratteristica magnetica con il punto  $(0, \Lambda_{mg})$  o l'origine degli assi rispettivamente.

Per quanto riguarda la coppia essa può essere sempre espressa con la

$$m(i_d, i_q) = \frac{3}{2} p [\lambda_d(i_d) i_q - \lambda_q(i_q) i_d]$$

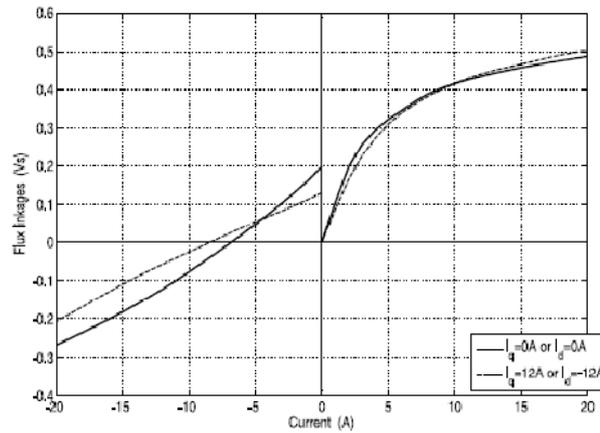
che rimane valida anche in presenza di saturazione del ferro e che, sfruttando le espressioni delle induttanze apparenti, diventa:

$$m(i_d, i_q) = \frac{3}{2} p \{ \Lambda_{mg} i_q + [L_d(i_d) - L_q(i_q)] i_d i_q \}$$

**5.4.1.1 Saturazione del ferro: saturazione incrociata (cross saturation)** – Aumentando il livello di saturazione del ferro e con certe configurazioni rotoriche più che altre, il flusso di ciascun asse dipende da entrambe le correnti, anche se, ovviamente, con la propria in modo più marcato. Valgono cioè le espressioni generali

$$\begin{cases} \lambda_d = \lambda_d(i_d, i_q) \\ \lambda_q = \lambda_q(i_d, i_q) \end{cases}$$

La Fig. 5.4.3 mostra il caso in questione; il flusso concatenato  $\lambda_d$  è mostrato per valore negativi della corrente  $i_d$  e per corrente  $i_q$  prima nulla (tratto continuo) e quindi maggiore di zero (porzione sinistra della figura). Il flusso concatenato  $\lambda_q$  è mostrato per valore positivi della corrente  $i_q$  e per corrente  $i_d$  prima nulla (tratto continua) e quindi minore di zero (porzione destra della figura).


 Fig. 5.4.3 – Caratteristiche magnetiche di un motore IPM in presenza di *cross saturation*.

Il fenomeno si spiega tenendo conto che esistono porzioni del circuito magnetico che sono comuni all'asse d e all'asse q e, conseguentemente la saturazione di tali porzioni da parte di una delle due correnti determina una variazione di flusso anche nell'altro asse anche se la corrente di questo secondo è rimasta costante.

In queste condizioni le equazioni elettriche vanno scritte nella forma

$$u_d(t) = Ri_d(t) + \frac{d\lambda_d(i_d(t), i_q(t))}{dt} - \omega_{me}\lambda_q(i_d(t), i_q(t))$$

$$u_q(t) = Ri_q(t) + \frac{d\lambda_q(i_d(t), i_q(t))}{dt} + \omega_{me}\lambda_d(i_d(t), i_q(t))$$

la cui sola ulteriore elaborazione fattibile porta a:

$$\begin{aligned} u_d(t) &= Ri_d(t) + \frac{\partial\lambda_d(i_d, i_q)}{\partial i_d} \frac{di_d(t)}{dt} + \frac{\partial\lambda_d(i_d, i_q)}{\partial i_q} \frac{di_q(t)}{dt} - \omega_{me}\lambda_q(i_d(t), i_q(t)) = \\ &= Ri_d(t) + \tilde{L}_d(i_d, i_q) \frac{di_d(t)}{dt} + \tilde{M}_{dq}(i_d, i_q) \frac{di_q(t)}{dt} - \omega_{me}\lambda_q(i_d(t), i_q(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_q(t) &= Ri_q(t) + \frac{\partial\lambda_q(i_d, i_q)}{\partial i_d} \frac{di_d(t)}{dt} + \frac{\partial\lambda_q(i_d, i_q)}{\partial i_q} \frac{di_q(t)}{dt} + \omega_{me}\lambda_d(i_d(t), i_q(t)) = \\ &= Ri_q(t) + \tilde{M}_{qd}(i_d, i_q) \frac{di_d(t)}{dt} + \tilde{L}_q(i_d, i_q) \frac{di_q(t)}{dt} + \omega_{me}\lambda_d(i_d(t), i_q(t)) \end{aligned}$$

ove sono state definite anche le *induttanze mutue differenziali*

$$\tilde{M}_{dq}(i_d, i_q) = \frac{\partial\lambda_d(i_d, i_q)}{\partial i_q} = \frac{\partial\lambda_q(i_d, i_q)}{\partial i_d} = \tilde{M}_{qd}(i_d, i_q)$$

la cui uguaglianza è dovuta alla proprietà di reciprocità dei mutui induttore.

Se il rotore ha una simmetria speculare rispetto a ciascuno dei suoi assi vale anche:

$$\lambda_d(i_d, i_q) = \lambda_d(i_d, -i_q) = \lambda_d(i_d, |i_q|)$$

mentre non si può applicare la relazione duale a meno che il rotore si privo di magneti.

#### 5.4 – Misure sui motori sincroni a magneti permanenti

Figure come quelle sopra riportate possono essere ricavate in fase di progetto o analisi della macchina sincrona mediante lo studio dei campi al suo interno con metodi di calcolo agli elementi finiti, oppure mediante misure.

Disponendo di un azionamento capace di alimentare la macchina con i desiderati valori di corrente diretta e in quadratura, le caratteristiche  $\lambda_d(i_d, 0)$  e  $\lambda_q(0, i_q)$  si ottengono applicando sola corrente diretta o solo corrente in quadratura (nell'intervallo dei valori che interessa) e misurando rispettivamente la tensione in quadratura o quella diretta, mentre la macchina è tenuta in rotazione da altro motore.

Dalle equazioni statoriche a regime (derivate nulle) ultime scritte si ha infatti:

$$U_d = -\Omega_{me} \Lambda_q(0, I_q)$$

$$U_q = \Omega_{me} \Lambda_d(I_d, 0)$$

da cui

$$\Lambda_d(I_d, 0) = \frac{U_q \Big|_{I_q=0}}{\Omega_{me}}$$

$$\Lambda_q(0, I_q) = -\frac{U_d \Big|_{I_d=0}}{\Omega_{me}}$$

che sono le relazioni cercate se non si è interessati a quantificare il fenomeno della cross saturation (o se è trascurabile).

Nel caso invece si voglia misurare l'effetto della saturazione incrociata è necessario imporre al motore entrambe le correnti diretta e in quadratura, una mantenuta costante mentre l'altra viene fatta variare nel campo di valori di interesse. Tenendo conto allora delle cadute di tensione dovute alla resistenza statorica si perviene alle relazioni:

$$\Lambda_d(I_d, I_q) = \frac{U_q - RI_q}{\Omega_{me}}$$

$$\Lambda_q(I_d, I_q) = -\frac{U_d - RI_d}{\Omega_{me}}$$