

CAPITOLO 4

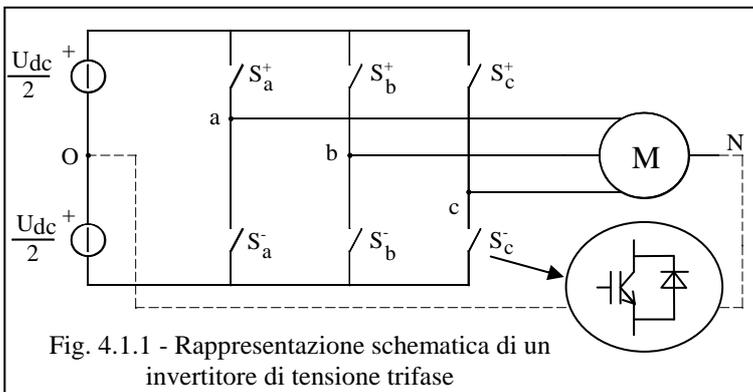
**Invertitore trifase di tensione in onda quadra e a PWM**

**4.1 - L'invertitore trifase di tensione**

I principali motori in alternata utilizzati negli azionamenti elettrici sono motori trifase asincroni o sincroni. Per entrambe queste tipologie di motori si rende necessario disporre di un'alimentazione trifase di tensione con ampiezza e frequenza controllabili.

L'obiettivo del presente paragrafo è quello di fornire una sintetica descrizione del più utilizzato generatore trifase di tensione ad ampiezza e frequenza regolabili, noto generalmente come invertitore trifase di tensione<sup>1</sup> (*three-phase voltage source inverter*).

**4.1.1 – Schema e principio di funzionamento** - Lo schema di principio di un invertitore di tensione trifase che alimenta un motore in alternata M è riportato in Fig.4.1.1.



L'ingresso all'inverter è una sorgente di tensione continua (*dc link*), solitamente ottenuta dalla rete di alimentazione (monofase o trifase, a seconda della potenza richiesta) tramite un raddrizzatore ed un condensatore di livellamento di appropriata capacità, atto a mantenere pressoché costante la tensione continua  $U_{dc}$  ai suoi capi. In Fig.4.1.1, tale tensione (*bus*

*voltage*) è stata rappresentata per comodità espositiva con due generatori uguali connessi in serie nel punto O.

L'inverter è essenzialmente costituito da sei interruttori elettronici di potenza ( $S_a^+$ -  $S_a^-$ -  $S_b^+$ -...-  $S_c^-$ , *power switches*) connessi per formare tre *rami o gambe (inverter legs or poles)*, uno per ogni fase del motore M. In pratica ciascuno degli interruttori è costituito dal parallelo fra un componente elettronico di potenza comandato in accensione e spegnimento (p.e. un transistor del tipo IGBT o un tiristore del tipo GTO), capace di condurre corrente dall'alto verso il basso in figura, e da un diodo (non controllato) disposto per condurre corrente dal basso verso l'alto. I diodi si rendono necessari, data la natura induttiva del carico, per fornire una via di richiusura delle correnti ad ogni apertura degli interruttori comandati.

Comandando la chiusura dell'interruttore superiore di un ramo si connette la fase del motore al positivo dell'alimentazione (*positive dc rail*); naturalmente, per evitare distruttivi cortocircuiti del bus in continua (*shoot-trough faults*), la coppia di interruttori dello stesso ramo deve essere sempre comandata alternativamente, in modo che mai entrambi gli interruttori risultino abilitati a condurre.

Ne risultano otto possibili *assetti o stati (inverter states)*, che possono essere rappresentati con una parola binaria a tre bit, uno per fase, adottando la convenzione di indicare con "1" la chiusura dell'interruttore superiore di un ramo e con "0" quella dell'interruttore inferiore. Ad esempio, lo stato 100 corrisponde a chiudere lo switch superiore  $S_a^+$  della fase "a", e quelli inferiori  $S_b^-$  ed  $S_c^-$

<sup>1</sup> La soluzione qui descritta e rappresentata in Fig. 4.1.1 è quella "a semiponte". Una più rara configurazione fa uso di 12 interruttori di potenza ed è detta "a ponte".

delle fasi "b" e "c" e produce una terna di tensioni fra i morsetti a,b e c e il punto O di mezzo dell'alimentazione i cui valori sono rispettivamente  $+U_{dc}/2$ ,  $-U_{dc}/2$ ,  $-U_{dc}/2$ .

Applicando la definizione di vettore spaziale, si trova che 6 degli 8 stati sono rappresentati da una stella di sei vettori di stato (*state vectors*) di ampiezza  $2/3 U_{dc}$  e sfasati rispettivamente di  $\pi/3$ , occupando i vertici di un esagono centrato nell'origine degli assi, come mostra la Fig.4.1.2: *stati attivi* (cfr. anche par.3.4.6).

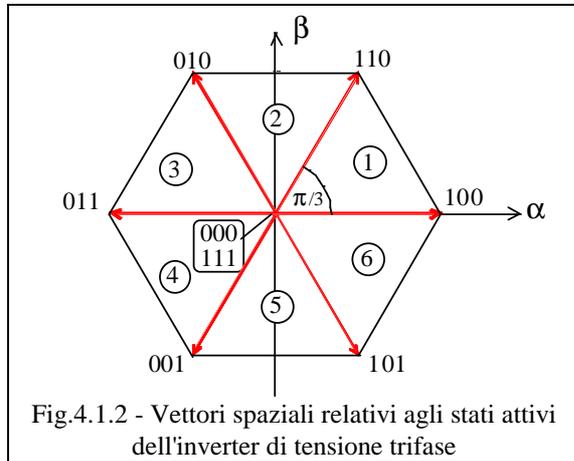


Fig.4.1.2 - Vettori spaziali relativi agli stati attivi dell'inverter di tensione trifase

I due stati 000 ed 111, che corrispondono rispettivamente alle configurazioni con tutti gli interruttori inferiori e superiori chiusi, hanno il relativo vettore spaziale nullo, ed occupano pertanto l'origine degli assi del piano complesso: *stati nulli*. La stella dei vettori individua sei regioni o *settori*, convenzionalmente numerati in senso antiorario come mostra la Fig.4.1.2. In questo testo anche i vettori spaziali di stato verranno numerati da 1 a 6, con 1=100, 2=110 e così via come in Fig. 3.4.12<sup>2</sup>. L'espressione del generico vettore di stato è data da<sup>3</sup>:

$$\mathbf{u}_m = \frac{2}{3} U_{dc} e^{j(m-1)\pi/3} \quad m \in [1..6] \quad (4.1.1)$$

Gli interruttori di potenza vengono realizzati con diverse tecnologie, a seconda della potenza da commutare e della velocità di commutazione. I più noti sono attualmente gli IGBT (Insulated Gate Bipolar Transistor) per medie potenze (fino a qualche kW) ed elevate frequenze di commutazione (fino a 15 KHz), i MOSFET per potenze piccole (sotto il kW) ed elevatissime frequenze (30 kHz ed oltre), i GTO (Gate Turn-Off Thyristor) per elevatissime potenze e basse frequenze. Componenti abbastanza nuovi, e ancora di limitato impatto nelle applicazioni sono gli MCT (Mos Controlled Thyristor) e gli IGCT (Integrated Gate-Commutated Thyristor).

In generale, i tempi con cui un interruttore di potenza reagisce ai comandi di apertura e chiusura non sono mai perfettamente uguali; per essere certi di comandare la chiusura di un interruttore quando l'altro (dello stesso ramo) abbia effettivamente cessato di condurre si frappone tra i comandi ai due switch un tempo di pausa (tempo morto o *dead time*). Questo ritardo nella conduzione di uno degli interruttori provoca una distorsione nelle tensioni di uscita rispetto ai segnali di riferimento e risulta opportuno, specialmente negli azionamenti più sofisticati, implementare opportuni algoritmi di compensazione.

**4.1.2 - Tensioni d'uscita di un inverter funzionante in onda quadra** - Il funzionamento in onda quadra (*six-step mode*) consiste nel comandare ciclicamente i tre interruttori superiori  $S_a^+$ ,  $S_b^+$ ,  $S_c^+$  dell'inverter di Fig.4.1.1 in modo che il loro stato sia 1 per un semiperiodo e quindi 0 nel restante semiperiodo, con uno sfasamento fra gli stati dei rami dell'inverter di  $2\pi/3$ . Gli interruttori inferiori sono comandati in modo duale. Le tensioni  $u_{aO}$ ,  $u_{bO}$ ,  $u_{cO}$  prodotte tra i morsetti a,b,c dell'inverter e il punto di mezzo O dell'alimentazione  $U_{dc}$  in continua hanno pertanto l'andamento di Fig.4.1.3.

-----  
Ciascuna forma d'onda, prolungata per periodicità, può essere espressa in serie di Fourier. Si consideri ad esempio  $u_{aO}$ : trattandosi di una funzione dispari (con l'origine dei tempi scelto come in Fig. 4.1.3), i

<sup>2</sup> Non è infrequente una scelta diversa, che attribuisce a ciascun vettore il valore decimale corrispondente al valore binario a tre bit (100=4, 110=6 e così via).

<sup>3</sup> In questo capitolo le grandezze vettoriali sono indicate con simbolo **grassetto**.

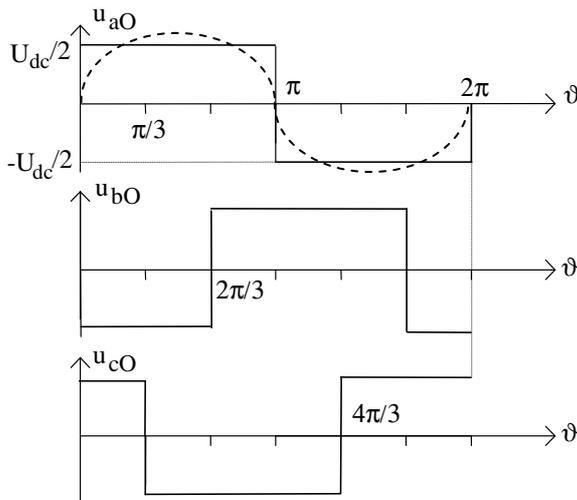


Fig. 4.1.3. - Funzionamento in onda quadra

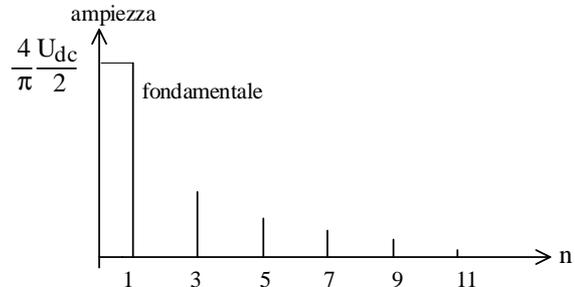


Fig.4.1.4 - Spettro della tensione di fase di un invertitore ad onda quadra

coefficienti relativi ai termini in coseno sono tutti nulli; dato poi che è soddisfatta la condizione  $u_{aO}(\vartheta) = -u_{aO}(\vartheta+\pi)$ , sono nulli anche tutti i coefficienti pari dei termini in seno<sup>4</sup>.  
Le equazioni delle altre due tensioni si ottengono dalla prima semplicemente traslando il tempo di  $T/3$  e  $2T/3$  e quindi ogni armonica di  $2n\pi/3$  e  $4n\pi/3$ :

$$\begin{aligned}
 u_{aO}(\vartheta) &= \frac{4 U_{dc}}{\pi} \frac{1}{2} \left[ \text{sen}(\vartheta) + \frac{1}{3} \text{sen}(3\vartheta) + \frac{1}{5} \text{sen}(5\vartheta) + \frac{1}{7} \text{sen}(7\vartheta) + \dots \right] \\
 u_{bO}(\vartheta) &= \frac{4 U_{dc}}{\pi} \frac{1}{2} \left[ \text{sen}\left(\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{3} \text{sen}(3\vartheta) + \frac{1}{5} \text{sen}\left(5\vartheta + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{7} \text{sen}\left(7\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right) + \dots \right] \\
 u_{cO}(\vartheta) &= \frac{4 U_{dc}}{\pi} \frac{1}{2} \left[ \text{sen}\left(\vartheta - \frac{4\pi}{3}\right) + \frac{1}{3} \text{sen}(3\vartheta) + \frac{1}{5} \text{sen}\left(5\vartheta + \frac{4\pi}{3}\right) + \frac{1}{7} \text{sen}\left(7\vartheta - \frac{4\pi}{3}\right) + \dots \right]
 \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

con  $\vartheta = \omega t$  e  $\omega = 2\pi/T$ , dove  $T$  è il periodo dell'onda quadra.

Le (4.1.2) indicano che la *componente fondamentale* (prima armonica a pulsazione  $\omega$ , tratteggiata per la fase a in Fig. 4.1.3) ha ampiezza  $U_{aO,1}$  pari a

$$U_{aO,1} = \frac{4 U_{dc}}{\pi} \frac{1}{2} \approx 0.6366 U_{dc} \tag{4.1.3}$$

e sono presenti tutte le sue armoniche di ordine dispari. L'ampiezza della generica armonica  $U_{aO,n}$  è data dalla

$$U_{aO,n} = \frac{4 U_{dc}}{n\pi} \frac{1}{2} = \frac{U_{aO,1}}{n} \tag{4.1.4}$$

<sup>4</sup> Il coefficiente del termine in seno di ordine  $n$  risulta infatti (ponendo  $\xi = \vartheta - \pi$ ):

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_{aO}(\vartheta) \sin(n\vartheta) d\vartheta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u_{aO}(\vartheta) \sin(n\vartheta) d\vartheta - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u_{aO}(\xi) \sin(n\xi + n\pi) d\xi$$

ed è chiaramente nullo per tutti gli  $n$  pari.

e risulta n volte minore della fondamentale (Fig.4.1.4).

Le (4.1.2) consentono inoltre di affermare che la componente fondamentale e le armoniche di ordine  $n=6m+1$  ( $m=0,1,2,3..$ ) formano terne dirette, quelle di ordine  $n=6m+3$  formano terne omopolari e le armoniche di ordine  $n=6m+5$  formano terne inverse.

In un inverter convenzionale, la tensione del bus in continua viene prodotta da un ponte raddrizzatore trifase, con un condensatore elettrolitico di livellamento in uscita. La tensione continua  $U_{dc}$  che si ottiene dipende se si considera il valore medio o di picco del raddrizzamento, oltre che naturalmente dalla tensione trifase concatenata efficace d'ingresso ( $U_{eff,conc}=380V$  o  $220V$ ). Nel primo caso, con  $380V$  e un ponte raddrizzatore trifase, si ha un valore medio  $U_{dc} = 1.35 U_{eff,conc} = 513 V$ , mentre considerando il raddrizzamento di picco risulta  $U_{dc} = \sqrt{2} U_{eff,conc} = 534 V$ .

Di conseguenza la componente fondamentale della tensione  $u_{a0}$  di uscita ha valore efficace pari a  $231 V$ .

Le tensioni concatenate (*phase-to-phase voltages*)  $u_{ab}$ ,  $u_{bc}$  e  $u_{ca}$  prodotte dall'invertitore si ottengono per differenza a due a due delle tensioni di fase. La Fig.4.1.5 riporta l'andamento delle tensioni concatenate nel funzionamento ad onda quadra.

Anche le tensioni concatenate possono essere sviluppate in serie di Fourier per ottenere le (4.1.5). Le (4.1.5) contengono la componente fondamentale e le armoniche di ordine dispari non multiple di 3 (quindi sono prive di componente omopolare) e la loro ampiezza è  $\sqrt{3}$  volte quella delle armoniche dello stesso ordine nelle (4.1.2).

$$u_{ab}(\vartheta) = \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \frac{U_{dc}}{2} \left[ \text{sen}\left(\vartheta + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{5} \text{sen}\left[5\left(\vartheta + \frac{\pi}{6}\right)\right] - \frac{1}{7} \text{sen}\left[7\left(\vartheta + \frac{\pi}{6}\right)\right] + \dots \right]$$

$$u_{bc}(\vartheta) = \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \frac{U_{dc}}{2} \left\{ \text{sen}\left(\vartheta + \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{5} \text{sen}\left[5\left(\vartheta + \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)\right] - \frac{1}{7} \text{sen}\left[7\left(\vartheta + \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right)\right] + \dots \right\} \quad (4.1.5)$$

$$u_{ca}(\vartheta) = \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \frac{U_{dc}}{2} \left\{ \text{sen}\left(\vartheta + \frac{\pi}{6} - \frac{4\pi}{3}\right) - \frac{1}{5} \text{sen}\left[5\left(\vartheta + \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right)\right] - \frac{1}{7} \text{sen}\left[7\left(\vartheta + \frac{\pi}{6} - \frac{4\pi}{3}\right)\right] + \dots \right\}$$

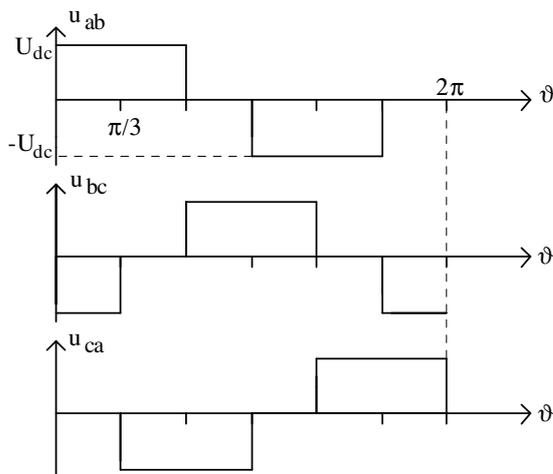


Fig. 4.1.5 - Tensioni concatenate nel funzionamento in onda quadra

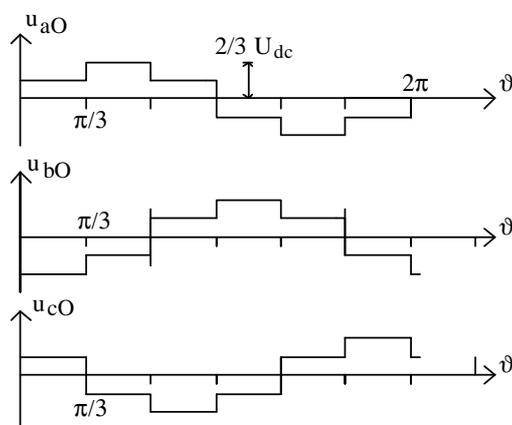


Fig. 4.1.6 - Tensioni stellate su carico equilibrato senza filo neutro

Se il centro stella del motore N è accessibile e viene collegato con il punto medio O dell'alimentazione in continua (tratteggiato in Fig.4.1.1) le *tensioni di fase (phase voltages)* del motore coincidono con quelle di Fig. 4.1.3. Molto spesso, comunque, il centro stella del motore non è disponibile e la terna di correnti che interessa il carico ha necessariamente somma nulla. Con questa ipotesi, se ai morsetti dell'invertitore è collegato un carico RLE a stella con fem bilanciate, si può dimostrare che

$$u_{aN}(t) + u_{bN}(t) + u_{cN}(t) = 0, \quad \forall t \quad (4.1.6)$$

e tra il centro stella N ed O appare una tensione (componente omopolare) che vale

$$u_{NO} = \frac{u_{aO} + u_{bO} + u_{cO}}{3} \quad (4.1.7)$$

il cui andamento è già stato riportato nel par. 3.4.6

-----

Sostituendo le (4.1.2) nella (4.1.7) si ricava

$$u_{NO}(\vartheta) = \frac{4}{\pi} \frac{U_{dc}}{2} \left[ \frac{1}{3} \sin(3\vartheta) + \frac{1}{9} \sin(9\vartheta) + \dots \right] \quad (4.1.8)$$

che indica come la tensione  $u_{NO}$  sia costituita da tutte e sole le armoniche multiple di tre presenti nella tensione di fase dell'invertitore.

-----

Le tensioni stellate del carico si ottengono finalmente sottraendo  $u_{NO}$  alle tensioni di fase dell'invertitore. In forma grafica esse si presentano come nella Fig. 4.1.6. Anche queste tensioni sono formate dalla componente fondamentale e dalle armoniche di ordine dispari purché non multiple di tre (sono prive della componente omopolare). Però la loro ampiezza è la stessa di quella delle relative armoniche delle (4.1.2).

Un ultimo aspetto legato al funzionamento in onda quadra è relativo al valore efficace (globale) delle tensioni prodotte, che può essere ricavato in modo particolarmente semplice sfruttando la definizione e le proprietà dei vettori spaziali. Ricordando la definizione di valore efficace di una grandezza periodica, si può scrivere:

$$3U_{eff}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u_a^2(\vartheta) + u_b^2(\vartheta) + u_c^2(\vartheta)) d\vartheta \quad (4.1.9)$$

dove  $u_a$ ,  $u_b$ ,  $u_c$  sono le tensioni di fase (stellate) sul carico (avendo tralasciato per semplicità l'altro pedice N) e  $U_{eff}$  è il valore efficace (globale) della tensione di fase. È possibile dimostrare, tramite sostituzione diretta, che vale l'espressione:

$$u_a^2(\vartheta) + u_b^2(\vartheta) + u_c^2(\vartheta) = \frac{3}{2} |\mathbf{u}(\vartheta)|^2 \quad (4.1.10)$$

dove  $\mathbf{u}(\vartheta)$  è il vettore spaziale associato alla terna di tensioni trifase  $u_a, u_b, u_c$ . Sostituendo la (4.1.10) nella (4.1.9) si ottiene allora:

$$U_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\mathbf{u}(\vartheta)|^2 d\vartheta} \quad (4.1.11)$$

che ha validità generale. Nel caso specifico di funzionamento in onda quadra, l'ampiezza del vettore spaziale è costante e pari a  $2/3 U_{\text{dc}}$  (par.3.4) ed il valore efficace risulta semplicemente  $U_{\text{eff}} = \sqrt{2/3} U_{\text{dc}}$ , che è costante se  $U_{\text{dc}}$  è costante e regolabile solo agendo su  $U_{\text{dc}}$ .

-----  
 La differenza fra (4.1.2) e (4.1.8) fornisce

$$\begin{aligned} u_{aN}(\vartheta) &= \frac{4}{\pi} \frac{U_{\text{dc}}}{2} \left[ \text{sen}(\vartheta) + \frac{1}{5} \text{sen}(5\vartheta) + \frac{1}{7} \text{sen}(7\vartheta) + \dots \right] \\ u_{bN}(\vartheta) &= \frac{4}{\pi} \frac{U_{\text{dc}}}{2} \left[ \text{sen}\left(\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{5} \text{sen}\left(5\vartheta + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{7} \text{sen}\left(7\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right) + \dots \right] \\ u_{cN}(\vartheta) &= \frac{4}{\pi} \frac{U_{\text{dc}}}{2} \left[ \text{sen}\left(\vartheta - \frac{4\pi}{3}\right) + \frac{1}{5} \text{sen}\left(5\vartheta + \frac{4\pi}{3}\right) + \frac{1}{7} \text{sen}\left(7\vartheta - \frac{4\pi}{3}\right) + \dots \right] \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

Le tensioni di fase del carico risultano pertanto prive della terza armonica e di tutte le sue multiple

-----

## 4.2 - Tecniche di modulazione della larghezza degli impulsi

La soluzione al problema della regolazione dell'ampiezza della tensione in uscita dell'invertitore, assieme ad un miglioramento del contenuto armonico a bassa frequenza, si ottengono distribuendo in modo appropriato un certo numero di inversioni di tensione di fase dell'invertitore all'interno di ciascun semiperiodo e modulando opportunamente la durata di ciascun impulso così ottenuto. Questa tecnica di controllo della tensione di uscita dell'invertitore è comunemente nota come modulazione della larghezza degli impulsi o PWM (*Pulse Width Modulation*).

Mediante le diverse tecniche di PWM si può fare in modo che, diversamente da quanto accade per l'onda quadra, le armoniche di maggior ampiezza abbiano frequenza molto più alta di 3, 5, 7, ... volte la fondamentale e siano quindi soggette ad una più energica azione di filtraggio da parte della induttanza del motore. *Una tensione PWM produce pertanto una corrente di fase pressoché sinusoidale, formata dalla componente fondamentale e da oscillazioni di modesta ampiezza sovrapposte ad essa.*

Con l'attenuazione delle armoniche di corrente calano le perdite e le armoniche di coppia e il motore può funzionare a piena potenza e a basse velocità.

La possibilità di variare la componente fondamentale  $U_1$  della tensione d'uscita modificando la larghezza degli impulsi, senza dover variare la tensione continua che lo alimenta, permette di alimentare l'invertitore tramite un semplice raddrizzatore a diodi. I principali vantaggi sono una semplificazione della sezione di potenza dell'azionamento ed un minor ritardo della risposta della

sezione di potenza ad un comando di tensione, con benefici sulle prestazioni dinamiche dell'azionamento<sup>5</sup>.

Per contro, il funzionamento in PWM presenta alcuni svantaggi rispetto a quello in onda quadra: le ripetute inversioni di tensione causano un aumento delle perdite di commutazione negli interruttori di potenza e il circuito di controllo dell'invertitore risulta più complesso, in quanto deve calcolare e produrre più istanti di inversione nel periodo dell'onda quadra. Tali svantaggi sono però ampiamente compensati dai vantaggi sopra elencati.

I benefici apportati dalla PWM nel funzionamento di un motore dipendono dal numero e dalla posizione delle inversioni. Per quanto riguarda il numero, risulta conveniente che sia il più alto possibile, compatibilmente con le limitazioni poste dalla massima frequenza di lavoro dei componenti di potenza e dalla capacità di calcolo del sistema di controllo dell'inverter.

Per la scelta della posizione delle inversioni esistono diverse tecniche e numerosissime varianti. Tutte però riproducono, con diverso approccio implementativi, il principio generale che è esposto nel paragrafo che segue.

### 4.3 – Principio generale della tecnica di modulazione della larghezza degli impulsi

Per la descrizione del principio generale della PWM che si può applicare ad un invertitore trifase alimentato da una tensione continua  $U_{dc}$ , si consideri dapprima una generica tensione  $u(t)$  come quella rappresentata in Fig. 4.3.1, il cui andamento è compreso fra  $+U_{dc}/2$  e  $-U_{dc}/2$ . Si immagini di suddividere la scala dei tempi in tanti intervallini  $T_s$ , *sufficientemente piccoli rispetto agli intervalli di tempo nei quali avvengono significative variazioni della tensione in questione*, e di costruire una seconda tensione  $u'(t)$  che sia costante in ogni intervallino  $T_s$  e pari al valore che la  $u(t)$  assume all'inizio di tale intervallino (per ricavare la  $u'(t)$  si dice che si deve *campionare (sample)* la tensione originale  $u(t)$  e *tenere (hold)* il valore campionato).

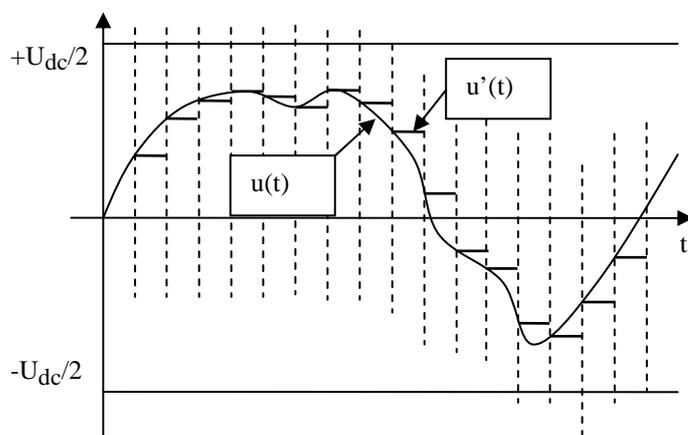


Fig. 4.3.1 -

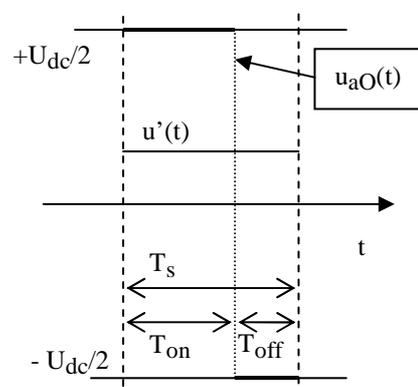


Fig. 4.3.2 -

Le due tensioni  $u(t)$  e  $u'(t)$  sono ovviamente differenti. Tuttavia se si applicano ad un carico RL con costante di tempo elettrica *sufficiente grande* rispetto a  $T_s$  si ottengono praticamente le stesse correnti.

Si consideri ora un ramo (una gamba) dell'invertitore, come quello formato dagli interruttori  $S_a^+$  e  $S_a^-$  di Fig. 4.1.1. Come visto, la tensione  $u_{aO}(t)$  può assumere solo due livelli:  $+U_{dc}/2$  o  $-$

<sup>5</sup> Il ritardo è valutabile in metà del periodo degli impulsi.

$U_{dc}/2$  a seconda che siano in conduzione (chiusi)  $S_1$  o  $S_2$ . A rigore non è quindi possibile generare  $u(t)$  né  $u'(t)$ . Tuttavia è possibile generare all'interno di ciascun intervallino di durata  $T_s$  una tensione  $u_{aO}(t)$  di valore medio pari a quello assunto da  $u'(t)$  nello stesso intervallo di tempo facendo assumere alla  $u_{aO}(t)$  il suo valore positivo  $+U_{dc}/2$  per una porzione  $T_{on}$  di  $T_s$  e il suo valore negativo  $-U_{dc}/2$  per la rimanente porzione  $T_{off}$ , come rappresentato, per un generico intervallino, in Fig. 4.3.2.

La durata dell'intervallo di tempo  $T_{on}$  può essere calcolata uguagliando il valor medio della  $u_{aO}(t)$  nell'intervallo considerato con il valore della  $u'(t)$  nello stesso intervallo. Ne risulta:

$$u'(t) = \frac{U_{dc}}{2} \frac{T_{on} - T_{off}}{T_s} = \frac{U_{dc}}{2} \frac{T_{on} - (T_s - T_{on})}{T_s} = \frac{U_{dc}}{2} (2 \frac{T_{on}}{T_s} - 1) = U_{dc} (\delta - \frac{1}{2}) \quad (4.3.1)$$

ove  $\delta$  pari al rapporto  $T_{on}/T_s$  è detto *ciclo utile* o *duty-cycle* ed è compreso fra 0 e 1.

In definitiva, indicata con l'indice  $k$  l'intervallo  $k$ -esimo in questione, con  $u_k$  il valore della  $u'(t)$  in tale intervallo  $k$ -esimo (valore della  $u(t)$  campionato all'inizio dell'intervallo  $k$ -esimo) e con  $\delta_k$  duty cycle nell'intervallo  $k$ -esimo si ottiene dalla (4.3.1)

$$\delta_k = \frac{T_{on}}{T_s} = \frac{u_k}{U_{dc}} + \frac{1}{2} \quad (4.3.2)$$

Ne risulta pertanto per la  $u_{aO}(t)$  una successione di coppie di impulsi positivi e negativi, di durata complessiva per ciascuna coppia pari a  $T_s$  e di durata  $T_{on}$  dell'impulso positivo *modulata in larghezza* dalla (4.3.2), come rappresentato in Fig. 4.3.3 dalla  $u_{aO,PWM}(t)$  generata per riprodurre, con le approssimazioni discusse, la  $u'(t)$  della Fig. 4.3.1, ovvero la  $u(t)$ . Ancora si potrà affermare che applicando allo stesso carico RL con costante di tempo elettrica sufficientemente più grande di  $T_s$  la  $u(t)$  oppure la  $u'(t)$  oppure anche la  $u_{aO,PWM}(t)$  si otterrà con buona approssimazione la stessa corrente differendo le tre forme d'onda solo per delle componenti sinusoidali (contenuto armonico) ad alta frequenza il cui effetto sulla corrente è piccolo a causa dell'impedenza del carico crescente con la frequenza.

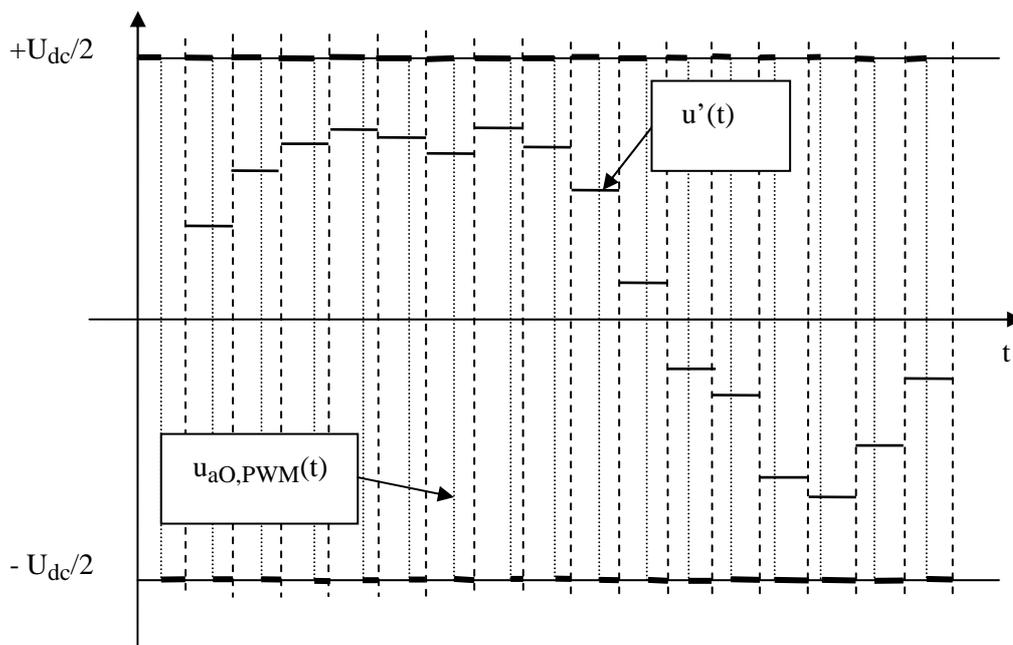


Fig. 4.3.3

**4.3.1 – PWM trifase sinusoidale** – Quanto descritto nel paragrafo precedente può essere esteso al controllo di un invertitore trifase allo scopo di generare una terna di tensioni sinusoidali del tipo

$$\begin{aligned} u_a(t) &= U_M \cos(\omega t + \vartheta_o) \\ u_b(t) &= U_M \cos\left(\omega t + \vartheta_o - \frac{2\pi}{3}\right) \\ u_c(t) &= U_M \cos\left(\omega t + \vartheta_o - \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

con le approssimazioni appena discusse<sup>6</sup>.

Come noto la terna (4.3.3) può essere rappresentata dal vettore spaziale  $\bar{u}(t)$  dato dalla (3.4.2). Le proiezioni di tale vettore e delle sue *riflessioni simmetriche*  $\bar{u}_b(t)$  e  $\bar{u}_c(t)$  sull'asse reale consentono di recuperare i valori della terna di tensioni di partenza. Se ancora si immagina di suddividere l'asse dei tempi in tanti piccoli intervalli di durata  $T_s$  (con  $T_s \ll T = 2\pi/\omega$ ) e di rappresentare sul piano complesso il vettore spaziale e le sue riflessioni simmetriche per i valori della terna (4.3.3) campionata all'inizio di ogni intervallino di durata  $T_s$ , si ottiene una sequenza di vettori spaziali (e di loro riflessioni simmetriche) separati da un piccolo angolo di rotazione, una delle quali è rappresentata in Fig. 4.3.4.

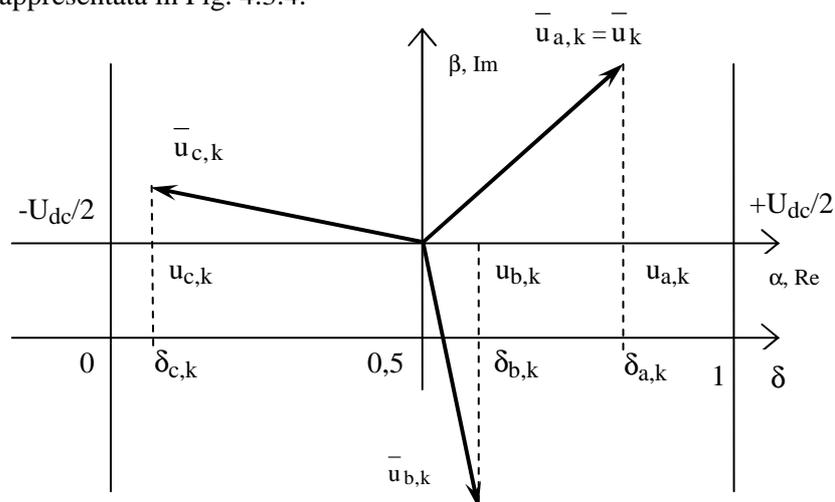


Fig. 4.3.4

Per ciascuno dei valori  $u_{a,k}$ ,  $u_{b,k}$  e  $u_{c,k}$  si può applicare la (4.3.2), ed eventualmente le (3.1.4), (3.1.7) e (3.1.8), per ottenere i corrispondenti valore di duty-cycle

<sup>6</sup> Più in generale si potrebbe considerare una terna di tensioni con ampiezza e frequenza variabili come illustrato nel par. 3.4.2.

$$\begin{aligned}
 \delta_{a,k} &= \frac{T_{a,on}}{T_s} = \frac{u_{a,k}}{U_{dc}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{U_{dc}} u_{\alpha,k} + \frac{1}{2} \\
 \delta_{b,k} &= \frac{T_{b,on}}{T_s} = \frac{u_{b,k}}{U_{dc}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{U_{dc}} \left( -\frac{1}{2} u_{\alpha,k} + \frac{\sqrt{3}}{2} u_{\beta,k} \right) + \frac{1}{2} \\
 \delta_{c,k} &= \frac{T_{c,on}}{T_s} = \frac{u_{c,k}}{U_{dc}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{U_{dc}} \left( -\frac{1}{2} u_{\alpha,k} - \frac{\sqrt{3}}{2} u_{\beta,k} \right) + \frac{1}{2}
 \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

che si riconoscono anche sulla scala del duty-cycle riportata in Fig. 4.3.4, ove  $\delta=1$  corrisponde ad una tensione PWM media in  $T_s$  pari a  $U_{dc}/2$  mentre  $\delta=0$  corrisponde a  $-U_{dc}/2$  e  $\delta=0,5$  a zero.

Il criterio di calcolo dei cicli utili espresso dalle (4.3.4) va sotto il nome di *PWM sinusoidale* per il fatto che i tre duty-cycle variano come le tensioni in (4.3.3), per questo dette *grandezze modulanti*, e quindi con legge sinusoidale.

Si riconosce dalla Fig. 4.3.4 (ed anche dalle equazioni (4.3.4)), che il massimo modulo consentito per il vettore spaziale è pari a  $U_{dc}/2$  per avere un duty-cycle compreso fra 0 e 1. Essendo il modulo del vettore spaziale coincidente con il valore massimo delle tensioni di fase, la PWM sinusoidale comporta le seguenti limitazioni:

$$\begin{aligned}
 U_{M,fase} &= U_M \leq \frac{U_{dc}}{2} \\
 U_{eff,fase} &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{U_{dc}}{2} \\
 U_{eff,conc} &\leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{U_{dc}}{2}
 \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

I limiti espressi dalle (4.3.5) possono essere superati passando in *sovramodulazione*. Tale tecnica non è qui considerata.

**4.3.2 – PWM trifase con iniezione di componente omopolare** – Allo scopo di allargare i limiti di tensione che la PWM sinusoidale presenta (cfr. (4.3.5)), si può ricorrere ad una sua modificazione che consiste nell'adottare come grandezze modulanti la terna di tensioni sinusoidali bilanciate date dalle (4.3.3) sommate ad una comune componente omopolare  $u_o(t)$

$$\begin{aligned}
 u_a(t) &= U_M \cos(\omega t + \vartheta_o) + u_o(t) \\
 u_b(t) &= U_M \cos\left(\omega t + \vartheta_o - \frac{2\pi}{3}\right) + u_o(t) \\
 u_c(t) &= U_M \cos\left(\omega t + \vartheta_o - \frac{4\pi}{3}\right) + u_o(t)
 \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

E' noto (cfr. par. 3.4.4) che la presenza di una componente omopolare  $u_o(t)$  non ha alcun effetto sulle correnti di un carico trifase a tre fili. Ciò consente di poter scegliere liberamente la componente omopolare più vantaggiosa dal punto di vista della realizzazione della PWM senza alcun effetto collaterale sulla dinamica delle correnti del circuito elettrico.

L'obiettivo principale da perseguire per la scelta di  $u_o(t)$  è quello di consentire la rotazione della stella di vettori spaziali  $\bar{u}_a(t)$ ,  $\bar{u}_b(t)$  e  $\bar{u}_c(t)$  delle maggiori dimensioni possibili rispettando i limiti  $-U_{dc}/2$ ,  $+U_{dc}/2$  delle loro proiezioni. A tale scopo si ricordi che la componente omopolare

corrisponde allo spostamento del centro della stella dei vettori spaziali citati lungo l'asse reale. Per perseguire l'obiettivo si evince pertanto che si potrà scegliere una componente omopolare tale che ogniqualvolta uno dei tre vettori spaziali si appresta a transitare attraverso l'asse reale, determinando la sua massima proiezioni positiva o negativa, il centro della stella dei vettori venga spostato dalla parte opposta, come in Fig. 4.3.5.

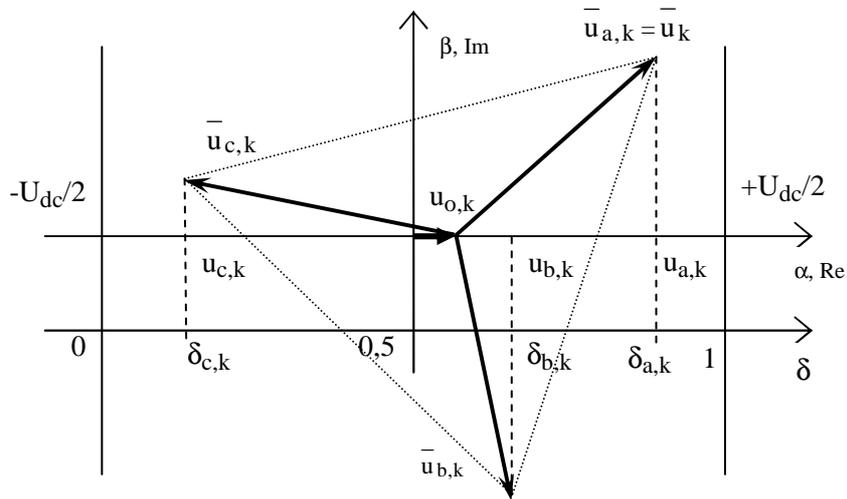


Fig. 4.3.5

Si avranno quindi tre spostamenti verso destra (valori positivi di  $u_o(t)$ , in corrispondenza dei transiti di un vettore spaziale attraverso il semiasse reale negativo) e tre verso sinistra (valori positivi di  $u_o(t)$ , in corrispondenza dei transiti di un vettore spaziale attraverso il semiasse reale positivo) per ogni giro dei tre vettori spaziali, ovvero per ogni periodo delle tensioni sinusoidali (4.3.3). La componente omopolare perciò avrà un andamento alternativo con frequenza tripla di quella delle tensioni trifase da generare.

In presenza di componente omopolare i duty-cycle dei tre rami dell'invertitore risultano dati dalle

$$\begin{aligned}
 \delta_{a,k} &= \frac{T_{a,on}}{T_s} = \frac{u_{a,k}}{U_{dc}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{U_{dc}} [u_{\alpha,k} + u_{o,k}] + \frac{1}{2} \\
 \delta_{b,k} &= \frac{T_{b,on}}{T_s} = \frac{u_{b,k}}{U_{dc}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{U_{dc}} \left[ -\frac{1}{2} u_{\alpha,k} + \frac{\sqrt{3}}{2} u_{\beta,k} + u_{o,k} \right] + \frac{1}{2} \\
 \delta_{c,k} &= \frac{T_{c,on}}{T_s} = \frac{u_{c,k}}{U_{dc}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{U_{dc}} \left[ -\frac{1}{2} u_{\alpha,k} - \frac{\sqrt{3}}{2} u_{\beta,k} + u_{o,k} \right] + \frac{1}{2}
 \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

Visto in questi termini, la scelta della componente omopolare  $u_{o,k}$ , può essere fatta in modo che, finché possibile, i tre duty-cycle risultino tutti compresi fra 0 e 1. Con una oculata scelta di  $u_{o,k}$  tali limiti possono essere soddisfatti fino ad una stella di vettori spaziali che definisce un triangolo equilatero (punteggiato in Fig. 4.3.5) avente il suo lato pari a  $U_{dc}$ . Se ne deduce che le tecniche di PWM con iniezione di componente omopolare comportano le seguenti limitazioni:

$$\sqrt{3}U_{M,fase} = U_{M,conc} \leq U_{dc}$$

$$\begin{aligned}
 U_{M,fase} &\leq \frac{U_{dc}}{\sqrt{3}} \\
 U_{eff,fase} &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{U_{dc}}{\sqrt{3}} \\
 U_{eff,conc} &\leq \frac{U_{dc}}{\sqrt{2}}
 \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

che sono più ampi di quelli espressi dalle (4.3.5).

Per esempio partendo da una tensione  $U_{dc}$  pari a 540 V, che si ottiene idealmente raddrizzando con un ponte trifase a diodi una terna di tensioni sinusoidali di valore efficace della concatenata pari a 400 V, con la PWM sinusoidale si genera una terna di tensioni il cui valore efficace concatenato della modulante è al massimo pari a

$$U_{eff,conc}|_{max} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{U_{dc}}{2} = 331V$$

mentre adottando una PWM con iniezione di omopolare si può giungere fino a:

$$U_{eff,conc}|_{max} = \frac{U_{dc}}{\sqrt{2}} = 382V$$

In ogni caso non si ottengono più i 400 V da qui è partito il raddrizzamento a meno che non si ricorra, per le tensioni più alte, al funzionamento in onda quadra con il quale si ottiene (cfr. (4.1.3) e (4.1.5))

$$U_{eff,conc}|_{max} = \frac{4}{\pi} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{U_{dc}}{2} = 421V$$

Appare evidente che possono esistere numerose soluzioni alla scelta di  $u_{o,k}$ , che corrispondono a diversi andamenti temporali di  $u_o(t)$  e che possono essere giustificate da vantaggi implementativi o in particolarità di funzionamento qui non considerate. Nella pratica si trovano algoritmi di scelta di  $\delta_{a,k}$ ,  $\delta_{b,k}$  e  $\delta_{c,k}$  che vanno sotto il nome di:

- PWM trifase con iniezione di terza armonica: le grandezze modulanti (4.3.6) sono scelte pari a:

$$\begin{aligned}
 u_a(t) &= U_M \cos(\omega t + \vartheta_o) - U_{3M} \cos 3(\omega t + \vartheta_o) \\
 u_b(t) &= U_M \cos\left(\omega t + \vartheta_o - \frac{2\pi}{3}\right) - U_{3M} \cos 3(\omega t + \vartheta_o) \\
 u_c(t) &= U_M \cos\left(\omega t + \vartheta_o - \frac{4\pi}{3}\right) - U_{3M} \cos 3(\omega t + \vartheta_o)
 \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

ove  $U_{3M}$  è fisso o proporzionale a  $U_M$ .

- PWM vettoriale: il calcolo dei duty-cycle è condotto con procedura matematica alternativa a quella delle (4.3.7) impostata su elaborazioni che coinvolgono il vettore spaziale della terna di tensioni che si vuole generare e i vettori che l'invertitore è in grado di produrre alla sua uscita.

- PWM ad aggancio di bus: il duty-cycle più vicino a uno o a zero è posto proprio pari a uno o a zero, secondo quale dei due limiti sia più vicino, sommando algebricamente un opportuno valore di  $u_{o,k}$ . Lo stesso contributo omopolare è quindi sommato anche nell'espressione degli altri due cicli utili.