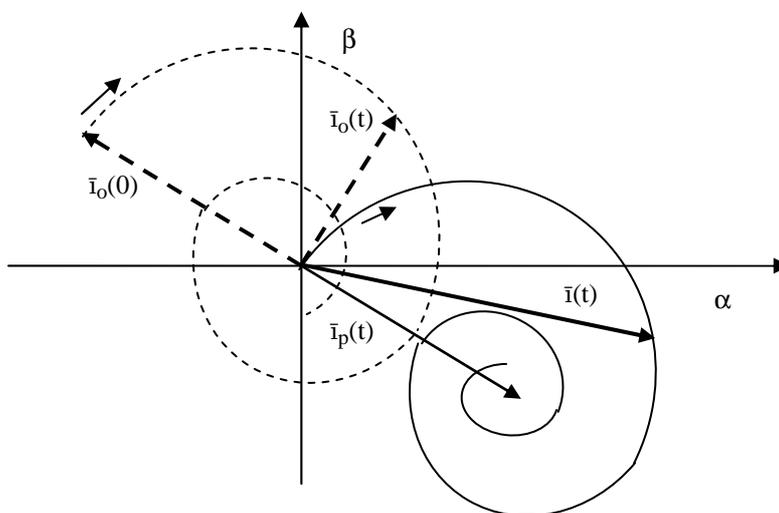


S. BOLOGNANI

Appunti di Azionamenti elettrici

APPENDICE A

# Vettori spaziali per lo studio dei sistemi trifase



ver. 10 ottobre 2015

**A.1 - Definizione di vettore spaziale**

Un carico (sistema) trifase è un quadripolo il cui comportamento ai morsetti è descritto da una terna di tensioni ( $u_a, u_b, u_c$ ), relative ai suoi tre morsetti a,b,c rispetto al quarto morsetto n (detto filo neutro) e da una terna di correnti ( $i_a, i_b, i_c$ ) entranti (se la convenzione di segno è quella degli utilizzatori) nei suoi terminali a,b,c, (dette fasi) come in Fig. A.1.1. Le tensioni prendono il nome di *tensioni stellate*; le correnti sono le *correnti di fase*. La differenza delle tensioni stellate ordinata in modo ciclico ( $u_{ab}=u_a-u_b, u_{bc}=u_b-u_c, u_{ca}=u_c-u_a$ ) costituisce la terna delle *tensioni concatenate*, la cui somma per il principio di Kirchhoff è identicamente uguale a zero.

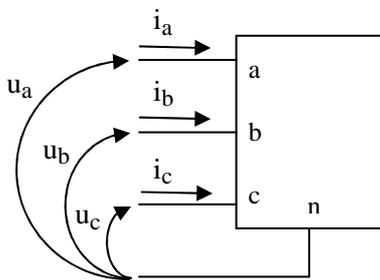


Fig. A.1.1 - Rappresentazione grafica del vettore spaziale

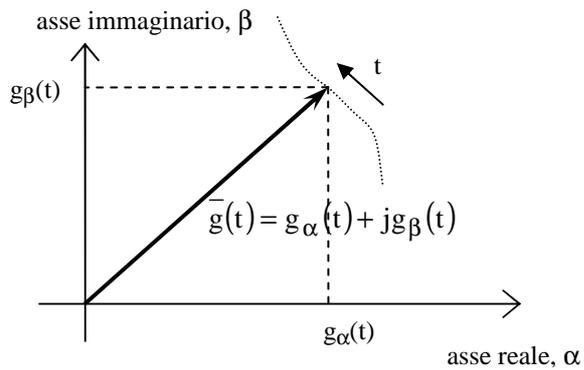


Fig. A.1.2 - Rappresentazione grafica del vettore spaziale  $\bar{g}(t)$ .

La descrizione interna del carico trifase porta in genere a definire altre terne di grandezze elettromagnetiche, per esempio una terna di flussi concatenati ( $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$ ) o di correnti interne ( $i_a, i_b, i_c$ ) e così via.

Il vettore spaziale è uno strumento matematico simbolico che consente di studiare il comportamento, anche dinamico, dei sistemi trifase applicando alle terne di grandezze una trasformazione che permette di semplificare significativamente le equazioni in gioco.

**A.1.1 - Terna trifase bilanciata** - Si consideri dapprima il caso, peraltro quasi sempre verificato nei sistemi trifase di interesse in queste note, di una terna di grandezze trifase *bilanciata* (si dice anche *terna pura*) cioè che soddisfa la condizione:

$$g_o(t) = \frac{g_a(t) + g_b(t) + g_c(t)}{3} = 0 \tag{A.1.1}$$

ove ogni grandezza è una generica funzione del tempo.

La (A.1.1) si esprime dicendo che la *componente omopolare*  $g_o$  della terna  $g_a, g_b, g_c$  è nulla. Alla terna  $g_a, g_b, g_c$  si associ la funzione complessa:

$$\bar{g}(t) = \frac{2}{3} \left[ g_a(t) + g_b(t)e^{j2\pi/3} + g_c(t)e^{j4\pi/3} \right] \tag{A.1.2}$$

che in un piano complesso con asse reale detto *asse  $\alpha$*  e asse immaginario detto *asse  $\beta$*  rappresenta un vettore di modulo e fase genericamente variabili nel tempo, Fig. A.1.2. Il vettore  $\bar{g}(t) = g_\alpha(t) + jg_\beta(t)$  è detto *vettore spaziale (in  $\alpha, \beta$ )* della terna di grandezze considerate.

La definizione del vettore spaziale può essere esplicitata per le sue componenti reale ed immaginaria. Dalla (A.1.2) si ricava infatti:

$$\operatorname{Re}[\bar{g}(t)] = g_\alpha(t) = \frac{2}{3} \left[ g_a(t) - \frac{g_b(t)}{2} - \frac{g_c(t)}{2} \right] \quad (\text{A.1.3})$$

che quando vale la (A.1.1), che consente di porre  $g_a = -g_b - g_c$ , corrisponde a

$$\operatorname{Re}[\bar{g}(t)] = g_\alpha(t) = g_a(t) \quad (\text{A.1.4})$$

La parte immaginaria vale invece

$$\operatorname{Im}[\bar{g}(t)] = g_\beta(t) = \frac{2}{3} \left[ g_b(t) \frac{\sqrt{3}}{2} - g_c(t) \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = \frac{1}{\sqrt{3}} [g_b(t) - g_c(t)] \quad (\text{A.1.5})$$

La (A.1.2) rappresenta la legge di trasformazione dalla terna  $g_a(t), g_b(t), g_c(t)$  al vettore spaziale  $\bar{g}(t)$ . Le (A.1.3) e (A.1.5) ne danno separatamente le componenti ortogonali.

Per la trasformazione inversa, che consente di passare da  $\bar{g}(t)$  a  $g_a(t), g_b(t), g_c(t)$ , si osservi innanzitutto che per i sistemi bilanciati vale la (A.1.4). Quindi in questo caso  $g_a(t)$  è la parte reale (proiezione sull'asse  $\alpha$ ) del vettore  $\bar{g}(t)$ , come mostra la Fig. A.1.3. Per questo motivo l'asse  $\alpha$  è detto anche *asse  $a$* .

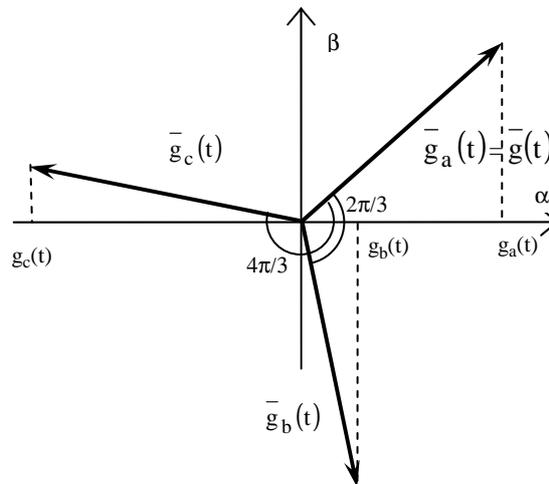


Fig. A.1.3 – Determinazione di  $g_a(t), g_b(t), g_c(t)$  dai vettori  $\bar{g}_a(t), \bar{g}_b(t)$  e  $\bar{g}_c(t)$ .

Si consideri poi il vettore

$$\bar{g}_b(t) = \bar{g}(t)e^{-j2\pi/3} = \frac{2}{3} [g_a(t)e^{-j2\pi/3} + g_b(t) + g_c(t)e^{j2\pi/3}] \quad (\text{A.1.6})$$

che corrisponde al vettore spaziale  $\bar{g}(t)$  ruotato di  $2\pi/3$  rad in senso orario. Con gli stessi passaggi che hanno portato alla (A.1.4) ora applicati alla (A.1.6), sempre sotto la condizione della (A.1.1), si trova che

$$\text{Re}[\bar{g}_b(t)] = \text{Re}[\bar{g}(t)e^{-j2\pi/3}] = -g_\alpha(t)\frac{1}{2} + g_\beta(t)\frac{\sqrt{3}}{2} = g_b(t) \quad (\text{A.1.7})$$

Dunque la  $g_b(t)$  si ottiene prendendo la proiezione sull'asse reale del vettore spaziale  $\bar{g}_b(t)$  ottenuto ruotando  $\bar{g}(t)$  di  $2\pi/3$  rad in senso orario.

Allo stesso modo la componente  $g_c(t)$  si ottiene dalla

$$\text{Re}[\bar{g}_c(t)] = \text{Re}[\bar{g}(t)e^{-j4\pi/3}] = -g_\alpha(t)\frac{1}{2} - g_\beta(t)\frac{\sqrt{3}}{2} = g_c(t) \quad (\text{A.1.8})$$

La Fig. A.1.3 illustra in forma grafica le relazioni (A.1.4), (A.1.7) e (A.1.8) ove, per estensione, è definito anche il vettore  $\bar{g}_a(t)$  coincidente con  $\bar{g}(t)$ .

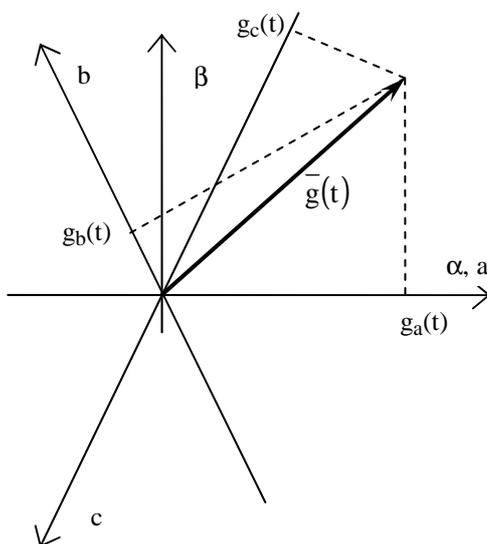


Fig. A.1.4 – Determinazione di  $g_a(t)$ ,  $g_b(t)$  e  $g_c(t)$  dal vettore spaziale  $\bar{g}(t)$

Invece di sfasare il vettore spaziale si può immaginare di lasciarlo nella sua propria posizione e di ruotare l'asse su cui eseguire la proiezione di  $2\pi/3$  rad in senso antiorario per la deduzione di  $g_b(t)$  (definendo un nuovo asse, detto *asse b*) e quindi di  $4\pi/3$  rad per  $g_c(t)$

(definendo l'asse  $c$ ), come in Fig A.1.4. Per estensione, e come peraltro già deciso, l'asse  $\alpha$  è detto anche *asse a*.

Le considerazioni sopra esposte mostrano che la proiezione del vettore spaziale  $\bar{g}(t)$  sugli assi  $a,b,c$  restituisce esattamente il valore delle grandezze trifase  $g_a(t)$ ,  $g_b(t)$  e  $g_c(t)$ , senza alcun fattore di scala. Per ciò si dice che la trasformazione (A.1.2) è *conservativa per le ampiezze*, proprietà che è ottenuta in virtù del fattore  $2/3$  che appare nella (A.1.2) stessa.

**A.1.2 - Terna trifase non bilanciata** - Si consideri ora il caso di una terna di grandezze trifase *non bilanciata* (si dice anche *terna spuria*) cioè per la quale:

$$g_o(t) = \frac{g_a(t) + g_b(t) + g_c(t)}{3} \neq 0 \quad (\text{A.1.9})$$

Allora si può scrivere:

$$\begin{aligned} g_a(t) &= g'_a(t) + g_o(t) \\ g_b(t) &= g'_b(t) + g_o(t) \\ g_c(t) &= g'_c(t) + g_o(t) \end{aligned} \quad (\text{A.1.10})$$

ove, per la (A.1.9) la terna  $g'_a(t)$ ,  $g'_b(t)$  e  $g'_c(t)$  è ovviamente bilanciata<sup>1</sup>. Alla (A.1.10) si può ancora applicare la (A.1.2) che, si verifica facilmente, soddisfa alla:

$$\bar{g}(t) = \frac{2}{3} \left[ g_a(t) + g_b(t)e^{j2\pi/3} + g_c(t)e^{j4\pi/3} \right] = \frac{2}{3} \left[ g'_a(t) + g'_b(t)e^{j2\pi/3} + g'_c(t)e^{j4\pi/3} \right] \quad (\text{A.1.11})$$

cioè è indipendente dal valore di  $g_o(t)$ . *Il vettore spaziale  $\bar{g}(t)$  definito dalla (A.1.2) non contiene quindi informazione relativa a  $g_o(t)$  e, di conseguenza l'applicazione delle (A.1.4), (A.1.7) e (A.1.8) restituisce solo la terna bilanciata  $g'_a(t)$ ,  $g'_b(t)$  e  $g'_c(t)$ <sup>2</sup>.*

In generale si potrà pertanto affermare che qualsiasi terna  $g_a(t)$ ,  $g_b(t)$  e  $g_c(t)$  può essere trasformata nella terna  $g_o(t)$ ,  $g_\alpha(t)$ ,  $g_\beta(t)$  mediante la trasformazione:

$$\begin{aligned} g_o(t) &= \frac{g_a(t) + g_b(t) + g_c(t)}{3} \\ g_\alpha(t) &= \frac{2}{3} \left[ g_a(t) - \frac{g_b(t)}{2} - \frac{g_c(t)}{2} \right] \\ g_\beta(t) &= \frac{1}{\sqrt{3}} [g_b(t) - g_c(t)] \end{aligned} \quad (\text{A.1.12})$$

<sup>1</sup> Per verificarlo basta sommare le (A.1.10) e tener conto della (A.1.9).

<sup>2</sup> La trasformazione di una terna di grandezze trifase nelle componenti del vettore spaziale e quindi l'antitrasformazione in una nuova terna trifase è una tecnica impiegata per eliminare la componente omopolare.

mentre la trasformazione inversa risulta:

$$g_a(t) = \text{Re}[\bar{\mathbf{g}}(t)] + g_o(t) = \text{Re}[\bar{\mathbf{g}}_a(t)] + g_o(t) = g_\alpha(t) + g_o(t)$$

$$g_b(t) = \text{Re}[\bar{\mathbf{g}}(t)e^{-j2\pi/3}] + g_o(t) = \text{Re}[\bar{\mathbf{g}}_b(t)] + g_o(t) = -\frac{1}{2}g_\alpha(t) + \frac{\sqrt{3}}{2}g_\beta(t) + g_o(t) \quad (\text{A.1.13})$$

$$g_c(t) = \text{Re}[\bar{\mathbf{g}}(t)e^{-j4\pi/3}] + g_o(t) = \text{Re}[\bar{\mathbf{g}}_c(t)] + g_o(t) = -\frac{1}{2}g_\alpha(t) - \frac{\sqrt{3}}{2}g_\beta(t) + g_o(t)$$

con  $\bar{\mathbf{g}}(t) = g_\alpha(t) + jg_\beta(t)$ .

La rappresentazione grafica di Fig. A.1.4 fornisce ora le componenti trifase  $g'_a(t)$ ,  $g'_b(t)$  e  $g'_c(t)$ , mentre l'interpretazione grafica della trasformazione generale (A.1.13) è mostrata in Fig. A.1.5 e restituisce la terna trifase completa di componente omopolare.

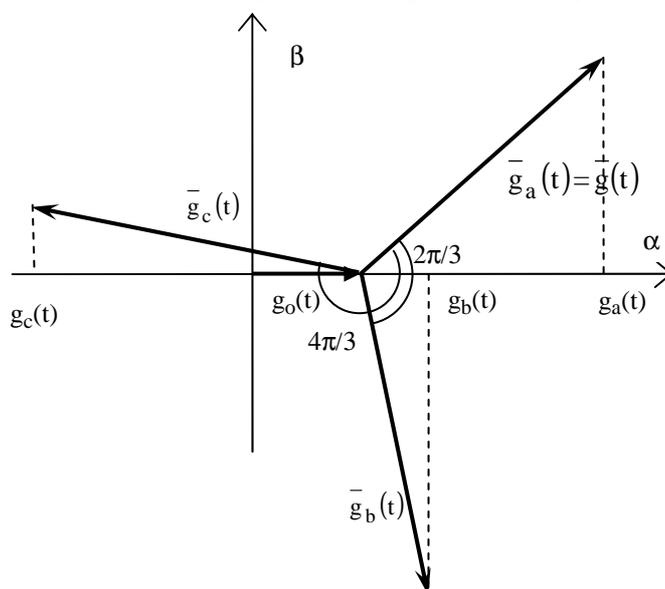


Fig. A.1.5 – Determinazione di  $g_a(t)$ ,  $g_b(t)$ ,  $g_c(t)$  dai vettori  $\bar{\mathbf{g}}_a(t)$ ,  $\bar{\mathbf{g}}_b(t)$  e  $\bar{\mathbf{g}}_c(t)$  per una terna non bilanciata

**A.1.3 - Espressioni matriciali** - La trasformazione (A.1.12) può essere espressa in forma compatta attraverso la seguente espressione matriciale<sup>3</sup>:

$$\underline{\mathbf{g}}_{\alpha\beta o} = \underline{\mathbf{T}}_{abc \rightarrow \alpha\beta o} \underline{\mathbf{g}}_{abc} \quad (\text{A.1.14})$$

ove  $\underline{\mathbf{g}}_{\alpha\beta o}$  è la matrice (colonna)  $[g_\alpha(t), g_\beta(t), g_o(t)]^t$ ,  $\underline{\mathbf{g}}_{abc}$  è la matrice  $[g_a(t), g_b(t), g_c(t)]^t$  e la trasformazione è definita dalla matrice, ricavata da (A.1.12)

<sup>3</sup> Le grandezze matriciali sono indicate con un simbolo sottolineato oppure esplicitamente con parentesi quadre; con il simbolo  $[\bullet]^t$  si intende la matrice trasposta di  $[\bullet]$ .

$$\underline{T}_{abc \rightarrow \alpha\beta o} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.15})$$

Analogamente la (A.1.13) diventa in forma matriciale

$$\underline{g}_{abc} = \underline{T}_{\alpha\beta o \rightarrow abc} \underline{g}_{\alpha\beta o} \quad (\text{A.1.16})$$

con, in accordo con (A.1.13), tenendo conto di (A.1.7) e (A.1.8)

$$\underline{T}_{\alpha\beta o \rightarrow abc} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 1 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.17})$$

## A.2 - Bilanci energetici

Si considerino due generiche terne una di tensioni ed una di correnti relative allo stesso sistema trifase di Fig. A.1.1. La potenza istantanea assorbita dal carico trifase vale

$$p(t) = u_a(t)i_a(t) + u_b(t)i_b(t) + u_c(t)i_c(t) \quad (\text{A.2.1})$$

che si può esprimere con la

$$p(t) = \underline{u}_{abc}^t \underline{i}_{abc} \quad (\text{A.2.2})$$

Applicando la (A.1.16) si trova

$$p(t) = \underline{u}_{\alpha\beta o}^t \underline{T}_{\alpha\beta o \rightarrow abc}^t \underline{T}_{\alpha\beta o \rightarrow abc} \underline{i}_{\alpha\beta o} \quad (\text{A.2.3})$$

che svolta diventa:

$$p(t) = \frac{3}{2} [u_\alpha(t)i_\alpha(t) + u_\beta(t)i_\beta(t)] + 3u_o(t)i_o(t) \quad (\text{A.2.4})$$

La (A.2.4) mostra che la trasformazione in esame *non è conservativa per le potenze*, nel senso che la potenza calcolata con le grandezze trasformate  $\alpha\beta$  (assumendo, per semplicità di discorso, nulla una o l'altra delle componenti omopolari) va corretta con il fattore 3/2 per avere la reale potenza del sistema trifase. Tale risultato si applica ad ogni calcolo che

coinvolga il prodotto di due terne di grandezze ovvero di due vettori spaziali

$$\underline{g}_{abc}^t \underline{h}_{abc} = \frac{3}{2} \underline{g}_{\alpha\beta}^t \underline{h}_{\alpha\beta}$$

**A.2.1 - Caso particolare delle terne bilanciate** - Nel caso in cui  $u_0=0$  o  $i_0=0$ , la (A.2.4) può anche essere riscritta nella forma

$$p(t) = \frac{3}{2} \operatorname{Re} \left[ \bar{u}(t) \check{i}(t) \right] \quad (\text{A.2.5})$$

ove  $\bar{u}(t)$  è il vettore spaziale associato alla terna delle tensioni mentre il simbolo  $\check{\phantom{x}}$  denota l'operazione di *complesso coniugato* del vettore spaziale  $\check{i}(t)$  delle correnti.

Inoltre, per estensione delle (A.2.1) e (A.2.4) facendo coincidere ad ogni tensione e corrente una generica comune grandezza  $g(t)$ , si riconosce che

$$g_a^2(t) + g_b^2(t) + g_c^2(t) = \frac{3}{2} [g_\alpha^2(t) + g_\beta^2(t)] = \frac{3}{2} |\bar{g}(t)|^2 \quad (\text{A.2.6})$$

che è un'espressione che restituisce direttamente il valore istantaneo del modulo del vettore spaziale a partire dai valori istantanei delle componenti della terna trifase bilanciata

$$|\bar{g}(t)| = \sqrt{\frac{2}{3} \sqrt{g_a^2(t) + g_b^2(t) + g_c^2(t)}} \quad (\text{A.2.7})$$

mentre l'argomento  $\gamma$  (angolo rispetto all'asse  $\alpha$ ) del vettore si ricava in ogni caso con la

$$\gamma = \arg[\bar{g}(t)] = \operatorname{atan}[g_\beta(t) / g_\alpha(t)] \quad (\text{A.2.8})$$

Derivando la (A.2.8) si ottiene l'espressione della velocità di rotazione istantanea del vettore spaziale che risulta pari a:

$$\omega = \frac{g_\alpha(t) * \frac{dg_\beta(t)}{dt} - g_\beta(t) * \frac{dg_\alpha(t)}{dt}}{g_\alpha(t)^2 + g_\beta(t)^2} \quad (\text{A.2.9})$$

### 3.3 - Sistema di riferimento rotante

Per le numerose applicazioni nel campo degli azionamenti elettrici, è d'interesse vedere come il vettore spaziale  $\bar{g} = g_\alpha + jg_\beta$  associato alla generica terna  $(g_a, g_b, g_c)$  possa essere espresso secondo un sistema di riferimento ortogonale d-q *rotante* con velocità angolare  $\omega_{dq}(t)$  rispetto al *sistema stazionario*  $\alpha$ - $\beta$  considerato nel paragrafo precedente.

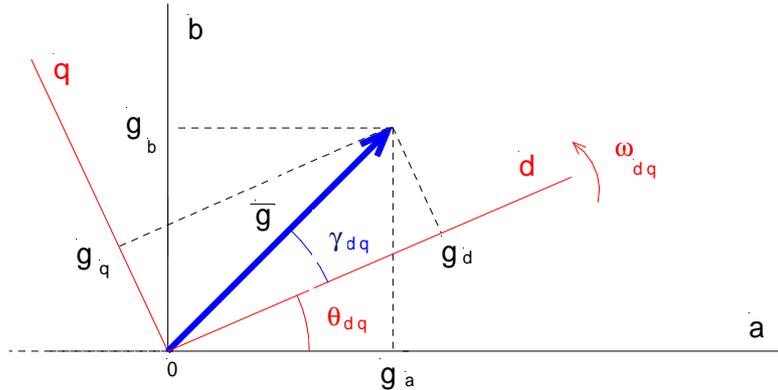


Fig.A.3.1 - Il vettore spaziale secondo un riferimento rotante d,q

Per distinguere le due rappresentazioni, si indicherà con  $\bar{g}_{\alpha\beta} = g_\alpha + jg_\beta = |\bar{g}| e^{j\gamma_{\alpha\beta}}$  la rappresentazione nel sistema di riferimento  $\alpha-\beta$  e con  $\bar{g}_{dq} = g_d + jg_q = |\bar{g}| e^{j\gamma_{dq}}$  quella in d-q, Fig. A.3.1. Ovviamente vale  $|\bar{g}_{\alpha\beta}| = |\bar{g}_{dq}| = |\bar{g}|$  e  $\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{dq} + \vartheta_{dq}$  ove  $\vartheta_{dq}$  è la posizione istantanea del sistema d-q rispetto al sistema  $\alpha-\beta$ . Con l'aiuto della figura è immediato quindi scrivere

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = |\bar{g}| e^{j(\gamma_{dq} + \vartheta_{dq})} = |\bar{g}| e^{j\gamma_{dq}} e^{j\vartheta_{dq}} = \bar{g}_{dq} e^{j\vartheta_{dq}} \quad (\text{A.3.1})$$

e dunque

$$\bar{g}_{dq} = \bar{g}_{\alpha\beta} e^{-j\vartheta_{dq}} \quad (\text{A.3.2})$$

La (A.3.2) può essere scritta in forma di relazione matriciale separando la parte reale ed immaginaria:

$$\begin{bmatrix} g_d \\ g_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_{dq}) & \sin(\vartheta_{dq}) \\ -\sin(\vartheta_{dq}) & \cos(\vartheta_{dq}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_\alpha \\ g_\beta \end{bmatrix} = \underline{T}_{\alpha\beta \rightarrow dq} \begin{bmatrix} g_\alpha \\ g_\beta \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.3})$$

La fase  $\vartheta_{dq}$  di tale sistema è in generale funzione del tempo ed è data da

$$\vartheta_{dq}(t) = \int_0^t \omega_{dq}(t) dt \quad (\text{A.3.4})$$

La matrice  $\underline{T}_{\alpha\beta \rightarrow dq}$  che appare nella (A.3.3) è ortonormale, dunque la sua inversa coincide con la trasposta:

$$\underline{T}_{dq \rightarrow \alpha\beta} = \underline{T}_{\alpha\beta \rightarrow dq}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_{dq}) & -\sin(\vartheta_{dq}) \\ \sin(\vartheta_{dq}) & \cos(\vartheta_{dq}) \end{bmatrix} \quad (A.3.5)$$

Con la procedura isata nel par. A.2, si dimostra allora che le trasformazioni da  $\alpha\beta$  a  $dq$  e viceversa sono conservative per la potenza e pertanto anche la potenza calcolata con le grandezze nel sistema di riferimento  $dq$  va moltiplicata per  $3/2$  per avere la reale potenza trifase.

Come si vedrà nel seguito, molto spesso si ricorre a qualche particolare sistema di riferimento (per esempio, "solidale" con il rotore del motore) perchè questo permette di scrivere le equazioni delle tensioni degli avvolgimenti e della coppia particolarmente semplici e adatte ad immediate interpretazioni.

A volte può accadere che nella trattazione di azionamenti per alcune macchine elettriche anisotrope sia conveniente o necessario mantenere la componente omopolare, adottando dunque una trasformazione che preservi tale componente.

La matrice di trasformazione dal sistema  $(\alpha,\beta,0)$  al sistema  $(d,q,0)$  si ottiene in modo diretto dalla (A.3.5), con la condizione di conservare la stessa componente omopolare:

$$\underline{T}_{dq0 \rightarrow \alpha\beta 0} = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_{dq}) & -\sin(\vartheta_{dq}) & 0 \\ \sin(\vartheta_{dq}) & \cos(\vartheta_{dq}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A.3.6)$$

che ha per inversa la matrice

$$\underline{T}_{\alpha\beta 0 \rightarrow dq0} = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_{dq}) & \sin(\vartheta_{dq}) & 0 \\ -\sin(\vartheta_{dq}) & \cos(\vartheta_{dq}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A.3.7)$$

La matrice completa di trasformazione dal sistema  $(a,b,c)$  al sistema rotante  $(d,q,0)$  si ottiene osservando che

$$\underline{g}_{dq0} = \underline{T}_{\alpha\beta 0 \rightarrow dq0} \underline{g}_{\alpha\beta 0} = \underline{T}_{\alpha\beta 0 \rightarrow dq0} \underline{T}_{abc \rightarrow \alpha\beta 0} \underline{g}_{abc} = \underline{T}_{abc \rightarrow dq0} \underline{g}_{abc} \quad (A.3.8)$$

e sostituendo le (A.3.7) e (A.1.15) si ottiene

$$\underline{T}_{abc \rightarrow dq0} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_{dq}) & \cos(\vartheta_{dq} - 2\pi/3) & \cos(\vartheta_{dq} - 4\pi/3) \\ -\sin(\vartheta_{dq}) & -\sin(\vartheta_{dq} - 2\pi/3) & -\sin(\vartheta_{dq} - 4\pi/3) \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (A.3.9)$$

e la sua inversa è

$$\underline{T}_{dqo \rightarrow abc} = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_{dq}) & -\sin(\vartheta_{dq}) & 1 \\ \cos(\vartheta_{dq} - 2\pi/3) & -\sin(\vartheta_{dq} - 2\pi/3) & 1 \\ \cos(\vartheta_{dq} - 4\pi/3) & -\sin(\vartheta_{dq} - 4\pi/3) & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.10})$$

#### A.4 - Esempi applicativi

Verranno ora presi in esame alcuni esempi di applicazione dei vettori spaziali. Se non diversamente indicato, ogni vettore spaziale si intenderà espresso nel sistema di riferimento  $\alpha\text{-}\beta$ .

**A.4.1 - Terna simmetrica di tensioni sinusoidali** - Si consideri per la struttura trifase di Fig. A.1.1 un sistema trifase simmetrico<sup>4</sup> di tensioni stellate sinusoidali:

$$\begin{aligned} u_a(t) &= U_M \cos(\omega t + \vartheta_o) \\ u_b(t) &= U_M \cos\left(\omega t + \vartheta_o - \frac{2\pi}{3}\right) \\ u_c(t) &= U_M \cos\left(\omega t + \vartheta_o - \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.4.1})$$

con  $\omega$  pulsazione angolare, espressa in rad/s, e  $\vartheta_o$  fase iniziale. Applicando la definizione (A.2.2) risulta, dopo qualche passaggio<sup>5</sup>:

$$\bar{\mathbf{u}}(t) = U_M e^{j(\omega t + \vartheta_o)} = U_M e^{j\vartheta_o} e^{j\omega t} \quad (\text{A.4.2})$$

Si tratta dunque, nel sistema di riferimento stazionario  $\alpha,\beta$ , di un vettore di *ampiezza*  $|\bar{\mathbf{u}}| = U_M = \sqrt{2} U_{eff}$ <sup>6</sup> e rotante in senso antiorario (positivo) con velocità angolare  $\omega$ , a partire dalla

<sup>4</sup> L'attributo "simmetrico" sta ad indicare che le tre tensioni sono di uguale ampiezza e sfasate reciprocamente di  $2\pi/3$ . Il sistema simmetrico si dice "diretto" se punti corrispondenti delle tre grandezze, per esempio i valori massimi, si succedono nell'ordine a,b,c,a,...; "inverso" se l'ordine è a,c,b,a,c,b,..... Il sistema dato dalle (A.4.1) è diretto.

<sup>5</sup> Una traccia per i passaggi è la seguente. Ponendo  $\xi = \omega t + \vartheta_o$  per praticità, si scrive:

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{2}{3} U_M \left[ \cos(\xi) + \cos(\xi - 2\pi/3)e^{j2\pi/3} + \cos(\xi - 4\pi/3)e^{j4\pi/3} \right]$$

e ricordando le formule  $\cos(\alpha)\cos(\beta) = 1/2 [\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$ ;  $\sin(\alpha)\cos(\beta) = 1/2 [\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$  si ha:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}} &= \frac{2}{3} U_M \left[ \cos(\xi) + \frac{1}{2} (\cos(\xi - 4\pi/3) + \cos(\xi) + \cos(\xi - 2\pi/3)) \right] + \\ &\dots + j \frac{2}{3} U_M \left[ \frac{1}{2} (\sin(\xi) - \sin(\xi - 4\pi/3) + \sin(\xi) - \sin(\xi - 2\pi/3) + \sin(\xi) - \sin(\xi)) \right] = \\ &= \frac{2}{3} U_M \left[ \frac{3}{2} \cos(\omega t + \vartheta_o) + j \frac{3}{2} \sin(\omega t + \vartheta_o) \right] \end{aligned}$$

posizione iniziale  $\vartheta_0$  come mostra la Fig. A.4.1. Le componenti reale ed immaginaria di tale vettore risultano naturalmente:

$$\begin{aligned} u_\alpha(t) &= U_M \cos(\omega t + \vartheta_0) \\ u_\beta(t) &= U_M \sin(\omega t + \vartheta_0) \end{aligned} \tag{A.4.3}$$

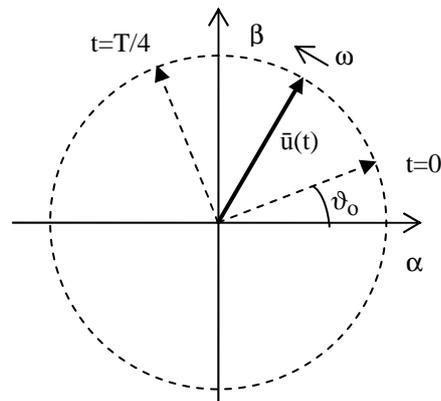


Fig. A.4.1 – Vettore spaziale di una terna simmetrica di tensioni sinusoidali

e la traiettoria sul piano complesso tracciata dal vertice del vettore spaziale è una circonferenza di raggio  $U_M$ , percorsa in senso antiorario con velocità angolare costante pari a  $\omega$ .

*Esercizio: Ripetere per la terna simmetrica inversa di tensioni:*

$$\begin{aligned} u_a(t) &= U_M \cos(\omega t + \vartheta_0) \\ u_b(t) &= U_M \cos\left(\omega t + \vartheta_0 + \frac{2\pi}{3}\right) \\ u_c(t) &= U_M \cos\left(\omega t + \vartheta_0 + \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

verificando che è rappresentata da un vettore spaziale di ampiezza costante e ruotante in senso orario (negativo) con velocità  $-\omega$ .

**A.4.1.1- Confronto con la rappresentazione simbolica di grandezze sinusoidali** – Come noto, per lo studio dei circuiti in *regime sinusoidale (isofrequenziale)* l'Elettrotecnica insegna l'uso delle *rappresentazioni simboliche delle grandezze sinusoidali*, che sono uno strumento matematico che consente di abbinare ad ogni grandezza sinusoidale una grandezza complessa che contiene l'informazione dell'ampiezza e della fase iniziale della grandezza rappresentata.

<sup>6</sup> Si ricorda che per un sistema trifase simmetrico di tensioni sinusoidali i valori massimo ed efficace delle componenti concatenate sono  $\sqrt{3}$  volte i rispettivi valori delle stellate e quindi vale  $|\bar{u}|=U_{M,conc}/\sqrt{3}=\sqrt{2}U_{eff,conc}/\sqrt{3}$ .

Più precisamente data la grandezza sinusoidale

$$g(t) = G_M \cos(\omega t + \vartheta_o)$$

con  $G_M$  e  $\omega$  costanti, essa è rappresentabile con la grandezza simbolica<sup>7</sup>

$$\dot{G} = \frac{G_M}{\sqrt{2}} e^{j\vartheta_o} \tag{A.4.4}$$

sicché vale

$$g(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ \dot{G} e^{j\omega t} \right] \tag{A.4.5}$$

che corrisponde a proiettare sull'asse reale il vettore definito dalla rappresentazione simbolica immaginato rotante in senso antiorario alla velocità  $\omega$ .

La (A.4.4) può essere applicata alle (A.4.1) per ottenere le tre rappresentazioni simboliche

$$\begin{aligned} \dot{U}_a &= \frac{U_M}{\sqrt{2}} e^{j\vartheta_o} \\ \dot{U}_b &= \frac{U_M}{\sqrt{2}} e^{j(\vartheta_o - 2\pi/3)} \\ \dot{U}_c &= \frac{U_M}{\sqrt{2}} e^{j(\vartheta_o - 4\pi/3)} \end{aligned} \tag{A.4.6}$$

che sono disegnate in Fig. A.4.2.

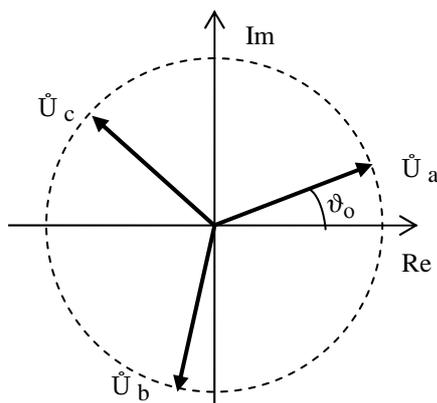


Fig. A.4.2 – Rappresentazioni simboliche per una terna simmetrica di tensioni sinusoidali.

<sup>7</sup> La scelta che il modulo della rappresentazione simbolica sia pari al valore efficace è dettata da soli motivi di comodità, risultando nella pratica molte quantità legate ai valori efficaci. Qualche autore usa nella (A.4.5) la parte immaginaria invece della parte reale, nel qual caso ciò che segue andrebbe leggermente aggiustato, ma la conclusione resta valida.

Una terna di grandezze trifase sinusoidali isofrequenziali è quindi rappresentata da una terna di grandezze simboliche, una per ciascuna grandezza di fase, ma è invece rappresentata da un solo vettore spaziale.

Si noti che nelle particolari condizioni in cui ci si è posti, e cioè di terna simmetrica diretta, la rappresentazione simbolica dalla tensione  $u_a(t)$  corrisponde, a parte un fattore di scala  $\sqrt{2}$ , con il vettore spaziale  $\bar{u}(t)$  nell'istante  $t=0$ , mentre le rappresentazioni simboliche di  $u_b(t)$  e  $u_c(t)$  corrispondono ai vettori  $\bar{u}_b(t)$  e  $\bar{u}_c(t)$  definiti nel par. 1.1.1, sempre nella posizione che loro assumono in  $t=0$ .

**A.4.2 - Terna simmetrica trifase con ampiezza e frequenza variabili nel tempo** - Una semplice estensione di quanto illustrato nel precedente esempio è il caso, frequente nello studio degli azionamenti elettrici trifase, nel quale le tre grandezze che formano la terna trifase, pur mantenendo condizioni di simmetria, hanno una comune ampiezza variabile nel tempo e una comune frequenza pure variabile nel tempo. Esse possono cioè essere espresse nella forma

$$\begin{aligned} u_a(t) &= U_M(t) \cos(\vartheta(t)) \\ u_b(t) &= U_M(t) \cos\left(\vartheta(t) - \frac{2\pi}{3}\right) \\ u_c(t) &= U_M(t) \cos\left(\vartheta(t) - \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.4.7})$$

con

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 + \int_0^t \omega(t') dt' \quad (\text{A.4.8})$$

Rigorosamente parlando *non si tratta di grandezze sinusoidali*, la rete cui fossero applicate non è in regime sinusoidale e quindi non ha senso applicare le rappresentazioni simboliche definite dalle (A.4.4) e (A.4.5) e non sono leciti i metodi di analisi dedicati ai circuiti in regime sinusoidale. Tuttavia è pienamente definibile e utilizzabile il vettore spaziale associato alle (A.4.7) e facilmente si prova che vale:

$$\bar{u}(t) = U_M(t) e^{j\vartheta(t)} \quad (\text{A.4.9})$$

che ancora è un vettore rotante in senso antiorario con velocità istantanea  $\omega(t)$  a partire dalla posizione iniziale  $\vartheta_0$  e con modulo istante per istante pari a  $U_M(t)$ .

**A.4.3 - Terna dissimmetrica bilanciata di tensioni sinusoidali** - Si consideri il sistema dissimmetrico<sup>8</sup> bilanciato di tensioni sinusoidali<sup>9</sup> :

---

<sup>8</sup> L'attributo "dissimmetrico" sta ad indicare che le tre tensioni NON sono di uguale ampiezza e/o NON sono sfasate reciprocamente di  $2\pi/3$ .

$$\begin{aligned}
 u_a(t) &= 100 \cos(\omega t) \\
 u_b(t) &= 75 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = 75 \sin(\omega t) \\
 u_c(t) &= -u_a(t) - u_b(t) = -100 \cos(\omega t) - 75 \sin(\omega t) = 125 \cos(\omega t - \pi - \arctan(0.75))
 \end{aligned}
 \tag{A.4.10}$$

La loro somma è nulla per definizione. Trattandosi di grandezze sinusoidali, le tre tensioni possono essere rappresentate dalla terna delle relative grandezze simboliche

$$\begin{aligned}
 \dot{U}_a &= \frac{100}{\sqrt{2}} \\
 \dot{U}_b &= -j \frac{75}{\sqrt{2}} \\
 \dot{U}_c &= -\frac{100}{\sqrt{2}} + j \frac{75}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}
 \tag{A.4.11}$$

mostrate in Fig. A.4.3 ove appare chiaramente che la loro somma è nulla.

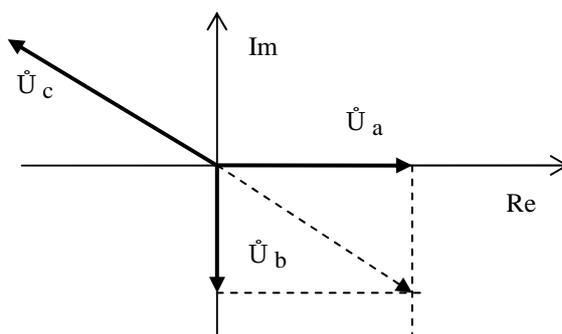


Fig. A.4.3 – Rappresentazione simbolica della terna di tensioni sinusoidali (A.4.11).

Alla terna (A.4.10) si può applicare la definizione di vettore spaziale le cui componenti  $u_\alpha(t)$  (parte reale) e  $u_\beta(t)$  (parte immaginaria) per le (A.1.3) e (A.1.5) sono

$$\begin{aligned}
 u_\alpha(t) &= 100 \cos(\omega t) \\
 u_\beta(t) &= \frac{1}{\sqrt{3}} [100 \cos(\omega t) + 150 \sin(\omega t)]
 \end{aligned}
 \tag{A.4.12}$$

---

<sup>9</sup> Se fa riferimento ad un esempio numerico in quanto una trattazione letterale generale sarebbe inutilmente complicata. Le considerazioni cui si perviene sono peraltro di validità generale.

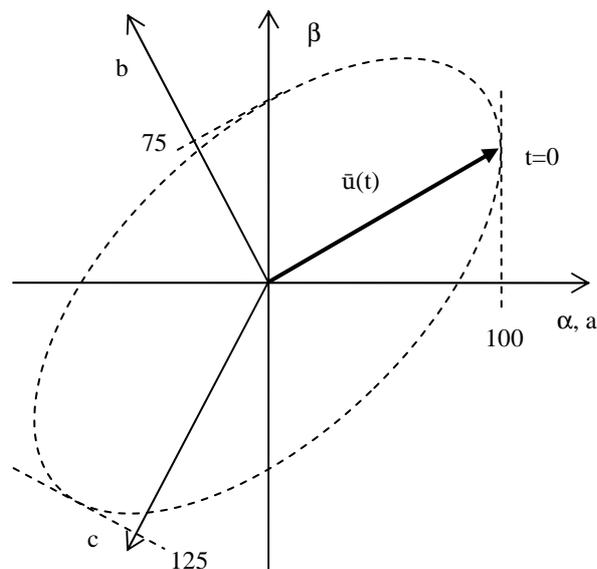


Fig. A.4.4 – Traiettoria del vettore spaziale di una terna di tensioni non simmetrica

Il vettore spaziale  $\bar{u}(t) = u_\alpha(t) + ju_\beta(t)$  traccia con il suo vertice al variare del tempo una curva ellittica come mostrato in Fig. A.4.4. Esso non ha più pertanto modulo costante come nel caso del par. A.1.1, ed, inoltre, l'ellisse è percorsa con velocità non costante (anche se mediamente pari a  $\omega$  visto che il vertice compie una rivoluzione completa ad ogni periodo). Con passaggi solo laboriosi si può anche dimostrare che il vettore spaziale  $\bar{u}(t) = u_\alpha(t) + ju_\beta(t)$  può essere scritto nella forma:

$$\bar{u}(t) = (93.3 + j28.8)e^{j\omega t} + (6.7 + j28.8)e^{-j\omega t} \quad (\text{A.4.13})$$

dalla quale si riconosce che esso risulta dalla somma di due vettori spaziali di ampiezza costante, uno rotante con velocità costante  $\omega$  (senso antiorario, *vettore diretto o forward*) e l'altro con velocità costante  $-\omega$  (senso orario, *vettore inverso o backward*). La Fig. A.4.5 mostra quanto affermato nell'istante  $t=0$  (vettori in tratto continuo) e negli istanti di tempo in cui i due vettori si sommano e si sottraggono (a tratteggio).

Il risultato (A.4.13) può essere facilmente ottenuto conoscendo la *Teoria delle componenti simmetriche*, sviluppata per lo studio dei sistemi trifase con grandezze sinusoidali dissimetriche. Tale teoria afferma, per esempio, che una terna dissimetrica di tensioni sinusoidali come la (A.4.10), rappresentata dalle espressioni simboliche (A.4.11), può essere scomposta nella somma di una terna simmetrica diretta e di una terna simmetrica inversa e fornisce le equazioni per svolgere questa scomposizione. Il primo vettore spaziale nella (A.4.13) è associato e rappresenta la terna diretta, mentre il secondo è rappresentativo della terna inversa. Per maggiori dettagli sulla Teoria delle componenti simmetriche si veda per esempio: G.Someda, *Elementi di Elettrotecnica generale*, Patron (PD), 1977.

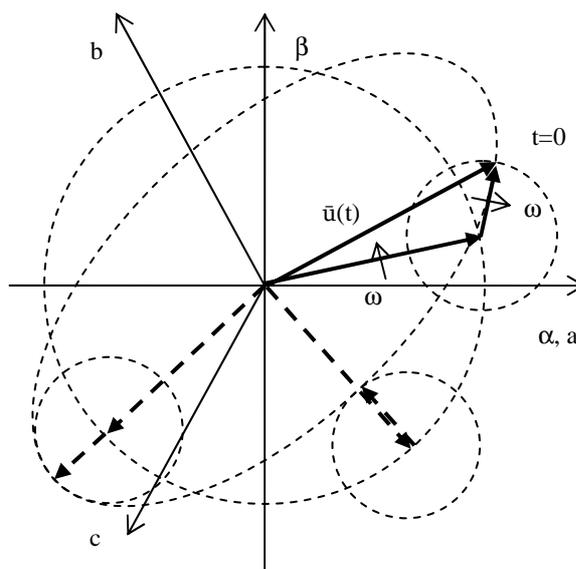


Fig. A.4.5 – Scomposizione del vettore spaziale nelle componenti diretta e inversa

**A.4.4 - Circuito RLE trifase** - Si consideri il circuito trifase di Fig.A.4.6, dove le induttanze L e le resistenze R sono considerate costanti e uguali per tutte e tre le fasi. Questa ipotesi rende molto semplice lo studio del circuito, anche durante i transitori, tramite i vettori spaziali associati a tensioni e correnti.

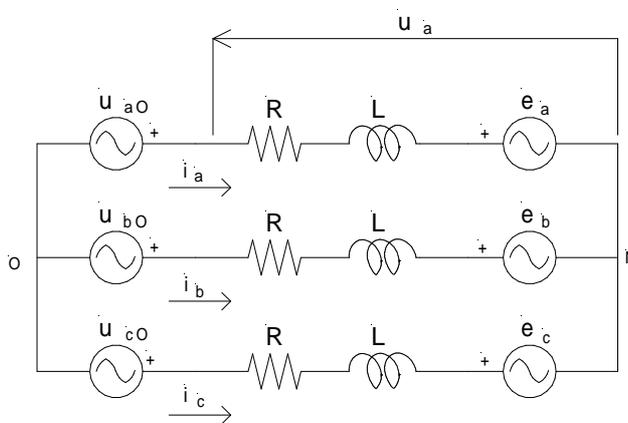


Fig.A.4.6 - Circuito RLE trifase

Nel dominio del tempo, con riferimento alla Fig.A. 4.6 si possono scrivere le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
 u_a &= Ri_a + L \frac{di_a}{dt} + e_a = u_{a0} - u_{NO} \\
 u_b &= Ri_b + L \frac{di_b}{dt} + e_b = u_{b0} - u_{NO} \\
 u_c &= Ri_c + L \frac{di_c}{dt} + e_c = u_{c0} - u_{NO}
 \end{aligned}
 \tag{A.4.14}$$

ove  $u_{N0}$  è la tensione del centro stella N rispetto al nodo O.

Moltiplicando la prima delle (A.4.14) per  $2/3$ , la seconda per  $2/3 e^{j2\pi/3}$ , la terza per  $2/3 e^{j4\pi/3}$ , sommando membro a membro le tre equazioni ed applicando la definizione di vettore spaziale (A.1.2) alle terne di tensione  $u_a, u_b, u_c$  e  $u_{a0}, u_{b0}, u_{c0}$  e alle correnti  $i_a, i_b, i_c$  si ottiene la relazione seguente (con ovvio significato dei simboli)

$$\bar{u} = R\bar{i} + L \frac{d\bar{i}}{dt} + \bar{e} = \bar{u}_{xO} - \bar{0}_v \tag{A.4.15}$$

dove con  $\bar{0}_v$  si è indicato il vettore spaziale nullo, che si ottiene a partire dalla terna di grandezze  $u_{N0}$  uguali tra loro, e  $\bar{u}_{xO}$  è il vettore spaziale che rappresenta le tre tensioni impresse  $u_{a0}, u_{b0}, u_{c0}$ .

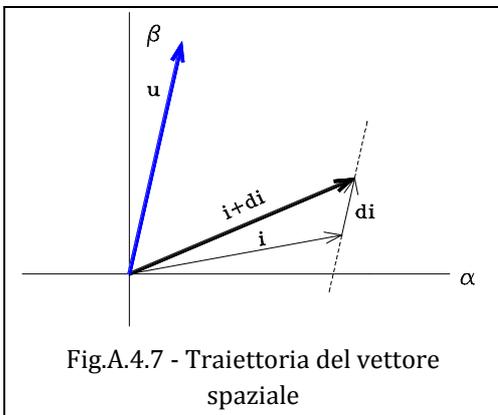
Utilizzando l'espressione (A.4.15) per l'analisi del circuito si perdono le componenti omopolari delle terne coinvolte; vale la pena di notare che comunque le *correnti hanno sempre somma nulla*, per il primo principio di Kirchhoff, dunque sono realmente prive di componente omopolare e che *la presenza delle eventuali componenti omopolari nelle tensioni o nelle forze elettromotrici non ha effetto alcuno sulle correnti se non c'è collegamento fra O e N*. Lo studio non perde quindi di validità.

Di seguito, si analizzerà la dinamica del circuito proposto in alcuni casi particolari, sempre utilizzando l'espressione vettoriale (A.4.15).

**A.4.4.1** -  $L=0, \bar{e}=0$ . In questa situazione, molto semplice, si ha  $\bar{u} = R\bar{i}$ , ovvero i vettori spaziali della tensione e della corrente sono in fase, e disegnano sul piano complesso traiettorie che sono scalate di R una rispetto all'altra.

**A.4.4.2** -  $R=0, \bar{e}=0$ . Il circuito è in questo caso puramente induttivo. L'espressione (A.4.15) diventa  $\bar{u} = L d\bar{i}/dt$ .

Si può scrivere anche  $d\bar{i} = (\bar{u}/L)dt$ , che fa capire come l'incremento vettoriale di corrente  $d\bar{i}$  sia parallelo al vettore di tensione  $\bar{u}$ . La situazione è descritta in Fig. A.4.7.



Si supponga adesso di voler studiare la dinamica del circuito partendo dalla condizione iniziale di correnti tutte nulle ( $\bar{i}(0)=0$ ), applicando una terna simmetrica di tensioni sinusoidali come la (A.4.1), in cui si ponga per semplicità  $\vartheta_0=0$ . Il vettore spaziale associato, ricavabile dalla (A.4.2) è allora:

$$\bar{u} = U_M e^{j\vartheta} = U_M e^{j\omega t} \tag{A.4.16}$$

Per la corrente si può scrivere:

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \frac{1}{L} \bar{u} \tag{A.4.17}$$

e dunque

$$\bar{i} = \frac{1}{L} \int_0^t \bar{u} dt + \bar{i}(0) = \frac{1}{L} \int_0^t U_M e^{j\omega t} dt = \frac{U_M}{j\omega L} (e^{j\omega t} - 1) = \frac{1}{j\omega L} \bar{u} - \frac{U_M}{j\omega L} = \frac{\bar{u} - U_M}{\omega L} e^{-j\pi/2} \tag{A.4.18}$$

Ricordando che ad una moltiplicazione per  $e^{-j\pi/2}$  corrisponde una rotazione di  $\pi/2$  in senso orario del vettore spaziale, partendo dalla espressione appena ricavata si ottiene la Fig.A.4.8.

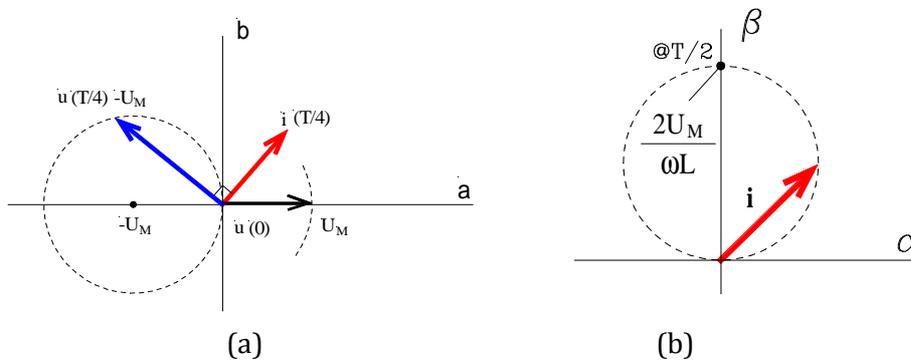


Fig.A.4.8 - Rappresentazione grafica della relazione vettoriale tra tensione e corrente

La circonferenza che giace interamente sul semipiano sinistro in Fig.A.4.8 (a) è la traiettoria del vettore spaziale  $(\bar{u} - U_M)$ ; in ciascun istante, il vettore di corrente  $\bar{i}$  si ottiene da quello tramite una rotazione di  $\pi/2$  rad in senso orario e riportandolo nella scala delle correnti mediante il fattore  $1/\omega L$ . E' facile allora rendersi conto che la traiettoria di  $\bar{i}$  risulta quella tratteggiata in Fig.A.4.8 (b).

Per ottenere l'andamento temporale ad esempio della corrente  $i_a(t)$  è sufficiente proiettare il vettore spaziale  $\bar{i}$  sull'asse reale (cfr. (A.1.4)); è facile rendersi conto che questo approccio è più semplice dello studio del sistema tramite la risoluzione delle singole equazioni differenziali (A.4.14).

**A.4.4.3** -  $\bar{e}=0, \bar{u}=0$ . In questo caso è di interesse l'evoluzione libera del circuito, naturalmente nell'ipotesi di avere condizioni iniziali non nulle. L'equazione (A.4.15) così si particolarizza:

$$R\bar{i} + L \frac{d\bar{i}}{dt} = 0 \tag{A.4.19}$$

La soluzione della (A.4.19) è rappresentata dalla

$$\bar{i} = \bar{i}(0) e^{-t/\tau} \tag{A.4.20}$$

dove  $\tau=L/R$ . Val la pena di ricordare infatti che la soluzione di equazioni tipo la (A.4.15) è formalmente identica, per le variabili complesse, a quella utilizzabile per le variabili reali.

La traiettoria del vettore spaziale di corrente è riportata in Fig.A.4.9. Si può notare come la fase di  $\bar{i}$  sia costante, dato che l'esponenziale  $e^{-t/\tau}$  è un numero reale e che quindi la fase di  $\bar{i}$  coincide sempre con quella iniziale di  $\bar{i}(0)$ . Il termine esponenziale influisce invece sull'ampiezza del vettore di corrente, come rappresentato in Fig.A.4.9 con una sovrapposizione di vettori di modulo decrescente nel tempo.

**A.4.4.4** -  $\bar{e}=0, \bar{u}=U_M e^{j\omega t}$ . L'equazione (A.4.15) così si particolarizza:

$$R\bar{i} + L \frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{u} \tag{A.4.21}$$

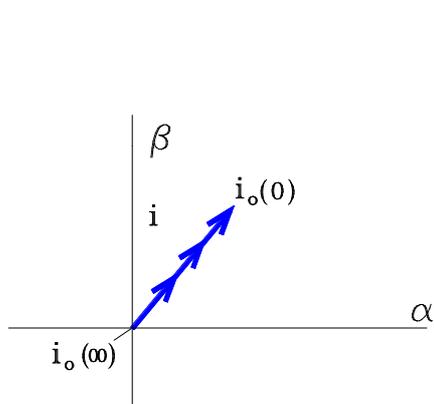


Fig.A.4.9 - Traiettoria del vettore spaziale in evoluzione libera

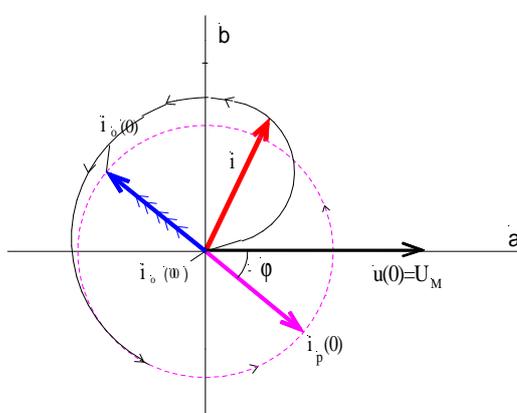


Fig.A.4.10- Traiettoria di  $\bar{i}(t)$  con  $\bar{e}=0, \bar{u}=U_M e^{j\omega t}$

Dalla teoria delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, l'integrale generale della (A.4.21) è rappresentata dalla somma di un suo integrale particolare  $\bar{i}_p(t)$  e dell'integrale generale dell'omogenea associata, che è dato da

$$\bar{i} = \bar{A} e^{-t/\tau} \tag{A.4.22}$$

Se il secondo membro (termine noto) dell'equazione differenziale è un esponenziale, come nel caso della (A.4.16), allora esiste un integrale particolare della stessa forma esponenziale

$$\bar{i}_p = \bar{I}_p e^{j\omega t} \tag{A.4.23}$$

Sostituendo la (A.4.23) nella (A.4.21) si può calcolare il valore di  $\bar{I}_p$ :

$$R\bar{I}_p e^{j\omega t} + j\omega L\bar{I}_p e^{j\omega t} = U_M e^{j\omega t} \tag{A.4.24}$$

$$\bar{I}_p = \frac{U_M}{R + j\omega L} \tag{A.4.25}$$

La (A.4.23) rappresenta il vettore spaziale delle correnti del circuito a regime sinusoidale, la cui posizione in  $t=0$  è data dalla (A.4.25).

L'integrale generale della (A.4.21) è dunque dato da

$$\bar{i} = \bar{A}e^{-t/\tau} + \frac{U_M}{R + j\omega L} e^{j\omega t} \quad (\text{A.4.26})$$

Il valore di A si calcola imponendo la condizione iniziale  $\bar{i}(0)=0$

$$\bar{A} = -\frac{U_M}{R + j\omega L} \quad (\text{A.4.27})$$

e quindi:

$$\bar{i} = -\frac{U_M}{R + j\omega L} e^{-t/\tau} + \frac{U_M}{R + j\omega L} e^{j\omega t} \quad (\text{A.4.28})$$

Tale espressione rappresenta in modo unitario la terna di correnti che percorrono il circuito in esame; la traiettoria nel piano complesso è riportata qualitativamente in Fig.A.4.10.

Si può notare come la componente dovuta all'integrale particolare abbia modulo costante e fase linearmente crescente nel tempo (componente "rotante" del vettore di corrente), mentre la componente relativa all'integrale dell'omogenea abbia fase costante e modulo decrescente esponenzialmente, dunque legato al transitorio iniziale.

**A.4.5 – Soluzione del circuito RL trifase nel sistema di riferimento dq rotante, con eccitazione sinusoidale** – Si consideri il caso trattato in A.4.4.4 con  $\bar{e}=0$  e  $\bar{u}=U_M e^{j\omega t}$ . Si vuole studiare la dinamica del circuito per  $t \geq 0$  a partire da condizioni iniziali nulle, in un sistema di riferimento rotante dq scelto con  $\omega_{dq}=\omega$  e  $\vartheta_{dq}=\omega t$ .

Per chiarezza si riporta la (A.4.21) evidenziandone la sua definizione in  $\alpha\beta$ :

$$R\bar{i}_{\alpha\beta} + L \frac{d\bar{i}_{\alpha\beta}}{dt} = \bar{u}_{\alpha\beta} = U_M e^{j\omega t} \quad (\text{A.4.29})$$

Ricordando la (A.3.1) e applicandola alla (A.4.29), si perviene a:

$$R\bar{i}_{dq} e^{j\vartheta_{dq}} + L \frac{d(\bar{i}_{dq} e^{j\vartheta_{dq}})}{dt} = \bar{u}_{dq} e^{j\vartheta_{dq}} \quad (\text{A.4.30})$$

Dopo aver svolto la derivata nella (A.4.30) e ricordando la (A.3.2) che porta a  $\bar{u}_{dq} = U_M$ , con le ovvie semplificazioni si ottiene:

$$R\bar{i}_{dq} + L \frac{d\bar{i}_{dq}}{dt} + j\omega L \bar{i}_{dq} = U_M \quad (\text{A.4.31})$$

che può essere anche riscritta nella forma

$$(R + j\omega L)\bar{i}_{dq} + L \frac{d\bar{i}_{dq}}{dt} = U_M \quad (\text{A.4.32})$$

La (A.4.32) è un'equazione differenziale lineare a coefficienti complessi che, tuttavia, si risolve con le usuali procedure. La sua soluzione si compone dell'integrale particolare  $i_{dq,p}(t)$  e della soluzione dell'omogenea  $i_{dq,o}(t)$ , quest'ultima particolarizzata per le condizioni iniziali date.

Stante il valore costante del termine noto, si ricava facilmente l'integrale particolare

$$\bar{i}_{dq,p}(t) = \frac{U_M}{(R + j\omega L)} = \text{costante} \quad (\text{A.4.33})$$

mentre la soluzione generale dell'omogenea sarà:

$$\bar{i}_{dq,o}(t) = \bar{A} e^{-\frac{R+j\omega L}{L}t} \quad (\text{A.4.34})$$

Sommando le (A.4.33) e (A.4.34) e imponendo la condizione iniziale nulla si ottiene infine:

$$\bar{i}_{dq}(t) = \frac{U_M}{(R + j\omega L)} \left( 1 - e^{-\frac{R+j\omega L}{L}t} \right) = \frac{U_M}{(R + j\omega L)} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} e^{-j\omega t} \right)$$

che si riconosce essere la somma di un vettore costante (la soluzione particolare, coincidente con la soluzione a regime) e di un vettore rotante con velocità  $-\omega$  di ampiezza iniziale uguale e contrari a quella del vettore che rappresenta la soluzione particolare.

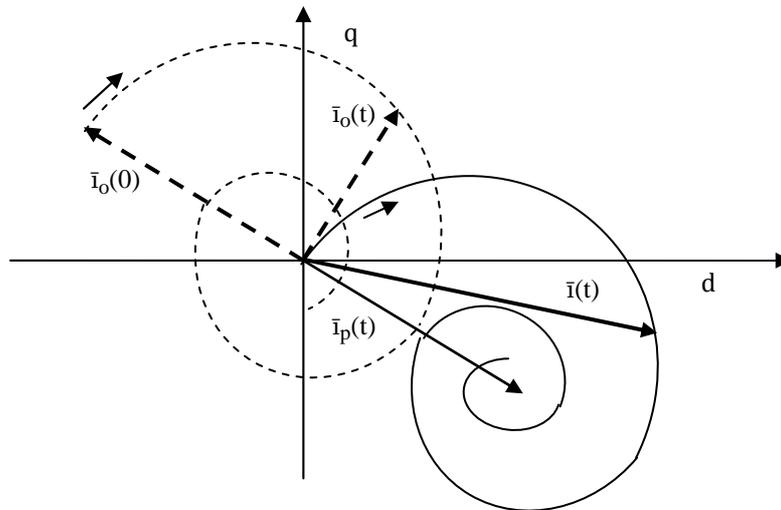


Fig. A.4.11 - Luogo tracciato dal vettore della corrente  $i_{dq}(t)$  per un circuito trifase RL con eccitazione sinusoidale

**A.4.6 - Terna simmetrica di tensioni ad onda quadra** - Si consideri una terna di tensioni ad onda quadra. Assumendo un'ascissa angolare e un periodo delle forme d'onda pari a  $2\pi$  esse siano sfasate reciprocamente di  $2\pi/3$  e di ampiezza pari ad  $U/2$ , essendo  $U$  l'ampiezza picco-picco, come illustrato in Fig.A.4.11.

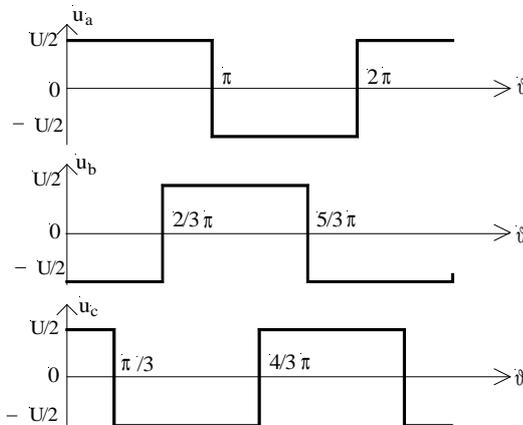


Fig.A.4.11 - Terna simmetrica di tensioni in onda quadra

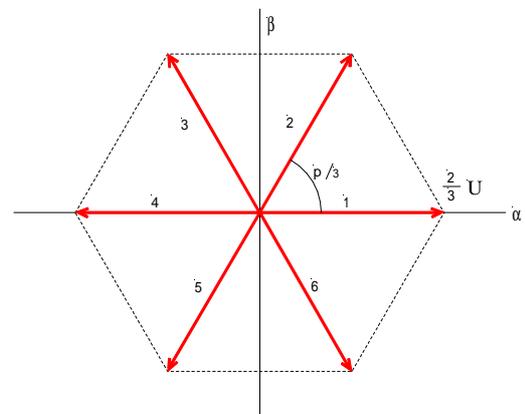


Fig.A.4.12 - Vettori spaziali relativi

E' innanzitutto da notare che si tratta di una terna di grandezze con componente omopolare non nulla. Tali grandezze rimangono tutte e tre costanti per archi di  $\pi/3$ , e allo scadere di ciascun intervallo vi è ciclicamente una delle tre tensioni che si inverte. Applicando ripetutamente la definizione (A.1.2), si trova un vettore spaziale di ampiezza  $2/3 U$ , che ruota a scatti di  $\pi/3$ , occupando in successione i vertici di un esagono centrato nell'origine degli assi, come in Fig. A.4.12

Si esegua ora l'operazione inversa, ovvero si ricavi ad esempio la tensione  $u_a(\vartheta)$  come proiezione del vettore spaziale sull'asse  $\alpha$  nelle successive posizioni 1,2,...6 da esso occupate,

applicando la (A.1.4). Si trova la forma d'onda riportata in Fig.A.4.13 (a)

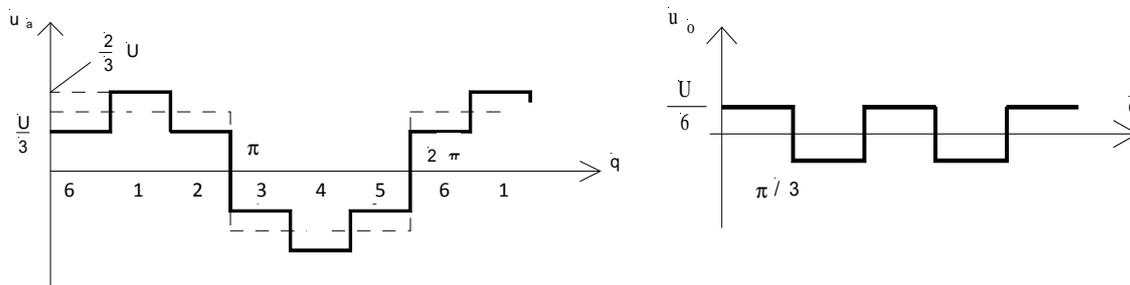


Fig. A.4.13 - (a)  $u_a$  priva della componente omopolare

(b) La componente omopolare

Si noti come la trasformazione inversa, definita dalla (A.1.4), restituisca una forma d'onda priva della componente omopolare, che in base alla definizione (A.1.1) o per comparazione fra la Fig. A.4.1 e la A.4.3(a) si trova essere un'onda quadra di periodo  $2\pi/3$  ed ampiezza  $U_{dc}/6$  (Fig.A.4.3 (b)).

Si noti come la trasformazione inversa, definita dalla (A.1.4), restituisca una forma d'onda priva di componente omopolare.