Es

$$f(x) = (x+2)\, e^{\frac{x+1}{x}}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$f(-x) \neq f(x)$ $\quad$ $f(-x) \neq -f(x)$ $\quad$ NON È SIMM.

segno $\quad f(x) \geq 0 \quad \underbrace{(x+2)} \cdot e^{\frac{x+1}{x}} \geq 0$ $\quad x+2 \geq 0 \quad x \geq -2$

$e^{\frac{x+1}{x}} > 0$

$\frac{x+1}{x} \to 0+1=1$

$$\lim_{x \to 0} (x+2)\, e^{\frac{x+1}{x}} \quad \text{NON ESISTE}$$

$(0+2) = 2$

$$\lim_{x \to 0^+} \underbrace{(x+2)}_{2}\, \underbrace{e^{\frac{x+1}{x}}}_{e^{+\infty}} = +\infty$$

$\frac{x+1}{x} \to \frac{1}{0^+} = +\infty$

$x = 0$ È ASINTOTO VERTICALE DESTRO

$$\lim_{x\to 0^-} \underbrace{(x+2)}_{2}\,\underbrace{e^{\frac{x+1}{x}}}_{e^{-\infty}\to 0} = 2\cdot 0 = 0 \qquad \frac{x+1}{x}\to\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} (x+2)\, e^{\frac{x+1}{x}} = \qquad \frac{x+1}{x} = \frac{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{(x+2)}_{+\infty}\,\underbrace{e^{1+\frac{1}{x}}}_{e^1} = +\infty\cdot e = +\infty \qquad 1+\frac{1}{\infty}=1+0=1$$

NON HO ASINTOTI ORIZZONT. NÉ A $+\infty$ NÉ A $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{(x+2)}_{-\infty}\cdot\underbrace{e^{1+\frac{1}{x}}}_{e^1} = -\infty\cdot e = -\infty \qquad 1+\frac{1}{\infty}=1+0=1$$

cerco asintoto obliquo a $+\infty$

$$\frac{x+1}{x} = 1+\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+2)\cdot e^{1+\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\left(1+\frac{2}{x}\right)e^{1+\frac{1}{x}}}{\cancel{x}} =$$

$$\to 1+\frac{1}{\infty} = 1+0=1$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right) \underbrace{e^{1+\frac{1}{x}}}_{\downarrow\, e^{1}} = 1\cdot e^{1} = e = m$$

$$\downarrow$$

$$1+\frac{2}{\infty} = 1+0=1$$

[stesso argomento vale a $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right) e^{1+\frac{1}{x}} = e$$] $= m$

$$q = \lim_{x \to +\infty} f(x) - mx =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (x+2)\, e^{1+\frac{1}{x}} - e \cdot x =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \underline{\cancel{x}\, e^{1+\frac{1}{x}}} + \boxed{2 \cdot e^{1+\frac{1}{x}}} - \underline{e\, x} =$$

$$2 \cdot e^{1+\frac{1}{\infty}} = 2 \cdot e^{1+0} = 2 \cdot e$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \underbrace{x \cdot \left(e^{1+\frac{1}{x}} - e\right)} + 2 e^{1+\frac{1}{x}} =$$

$$+\infty \cdot 0$$

$$e^{1+\frac{1}{x}} = e^{1}\, e^{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x \cdot \left[\underbrace{e\, e^{\frac{1}{x}}}_{e^{1+\frac{1}{x}}} - e \right] + 2e^{1+\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e \cdot x \cdot \left[e^{\frac{1}{x}} - 1 \right] + 2e^{1+\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to+\infty \\ -\infty}} e \cdot \left[\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \right] + 2e^{1+\frac{1}{x}}$$

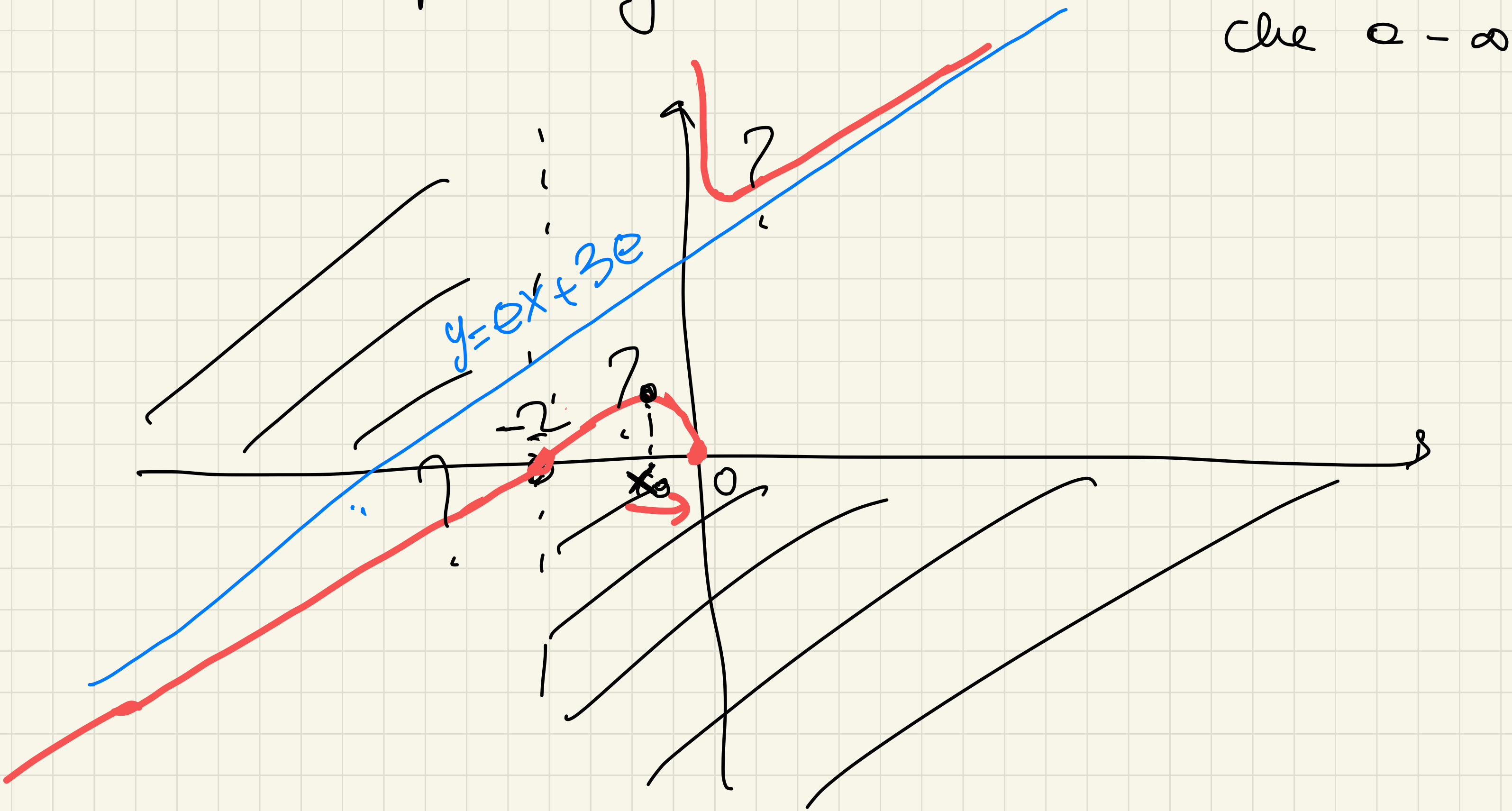
$y = \frac{1}{x}$

$$\lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

$$= \lim_{y\to 0} e \cdot \left[\frac{e^y - 1}{y} \right] + 2 \cdot e^{1+y} = e \cdot 1 + 2 \cdot e$$

$$= 3e = 9$$

as. obliquo $y = ex + 3e$ sia a $+\infty$ che a $-\infty$



Def $\quad f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x_0 \in D$ è punto di MASSIMO (RELATIVO) LOCALE per f se

esiste $r > 0$ tale che $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) \cap D$

$x_0 \in D$ è pto di MASSIMO ASSOLUTO GLOBALE se

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in D$$

($f(x_0)$ è il VALORE MASSIMO raggiunto dalla funzione) è il MASSIMO dell'immagine di f.

x_0 è pto di MINIMO LOCALE (o relativo)

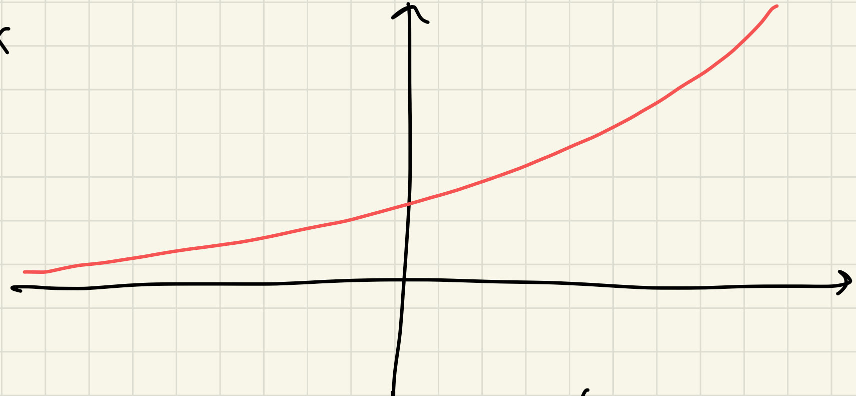
per f se $\exists r$ $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) \cap D$

x_0 è pto di MINIMO GLOBALE (o assoluto)

per f se $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in D$.

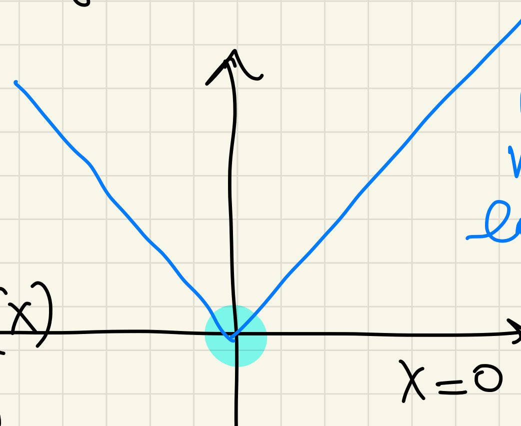
[$f(x_0)$ è il valore minimo possibile che la funzione assume, $f(x_0)$ è il MINIMO della immagine di f].

es $f(x)=e^x$



f non ha pti di massimo/minimo né locale né globale

es $f(x)=|x|$



non ha pti di massimo né locali né assoluti

$$f(0)=0 \leq |x| = f(x) \quad \forall x \in D$$

$x=0$ PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO

f CONTINUA in D significa che

$\forall x_0 \in D$ e di accumulazione per D

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Teoremi per funzioni CONTINUE su intervalli I.

TEOREMA (dei VALORI INTERMEDI)

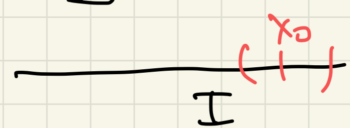
IPOTESI

- $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — I intervallo

$$I = (a,b) = [a,b] = [a,+\infty) \quad (-\infty, b]$$

- f continua nell'intervallo I

$$\forall x_0 \in I \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$



Allora
f assume tutti i valori compresi tra
estremo inferiore e l'estremo superiore
della sua immagine.

$A = \{ y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in I \quad f(x) = y \}$ = tutti i possibili valori assunti da f su punti di I

$A \subseteq \mathbb{R}$

$\boxed{\sup A = S}$ $\boxed{\inf A = s}$

se A è limitato superiorm. $S = \sup A$
A è ill. sup $S = +\infty$

se A è limitato inferior. $s = \inf A$
A è illim. inf. $s = -\infty$

teorema dice $\forall\, c \in \mathbb{R}$ $\quad s < c < S$

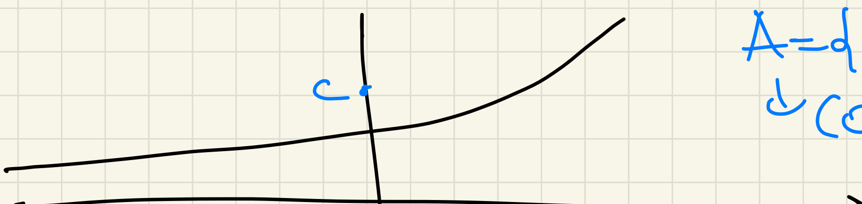
esiste $x \in I$ tale che $f(x) = c$.

(per ogni valore compreso tra inf e sup di tutti i valori possibili assunti dalla f esiste una $x \in I$ tale che $f(x)$ è proprio quel valore).

es : $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad I = \mathbb{R}$ $\quad e^x$ è continua su $I = \mathbb{R}$

$A = \{y \;\; e^x = y\}$ = valori > 0

$\downarrow (0, +\infty)$ $\quad s = 0 \quad S = +\infty$

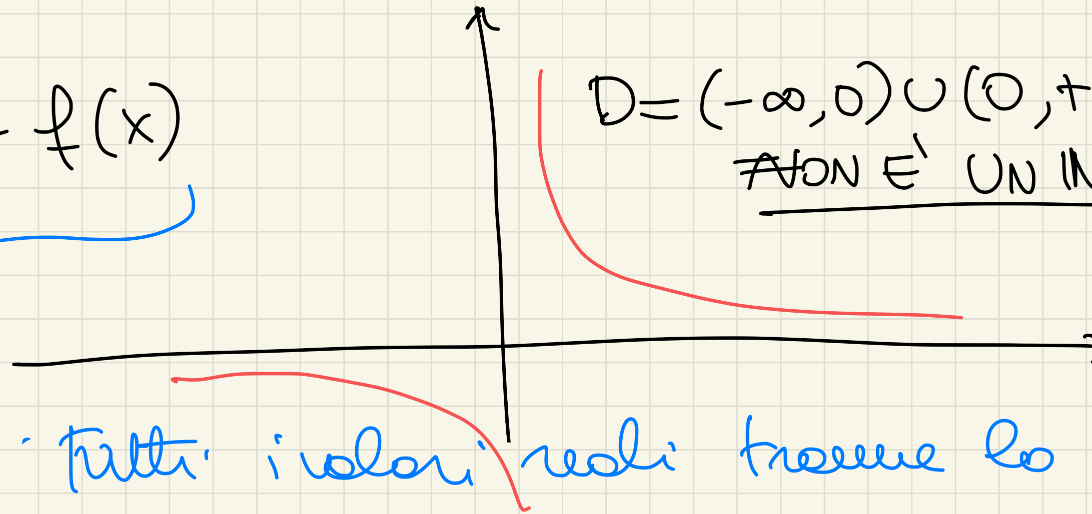


$\forall\, c \in (0, +\infty) \rightarrow \exists\, x \in \mathbb{R} \;\; e^x = c$

teorema non vale per funzioni che non siano continue e per funzioni continue non definite su intervalli!

es $\underbrace{\frac{1}{x} = f(x)}$

f(x) assume tutti i valori reali tranne lo 0.



$D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

NON E' UN INTERVALLO

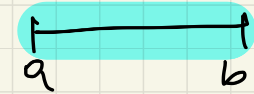
sup immagine $= +\infty$ inf immagine $= -\infty$

f NON ASSUME tutti i valori compresi tra sup immagine e inf immagine.

TEOREMA DI WEIERSTRASS

Sia $I = [a,b]$ intervallo CHIUSO e LIMITATO

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA in $[a,b]$



$\forall x_0 \in (a,b)$ $\quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b) \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

allora $\exists x_0 \in [a,b]$ tale che $f(x) \le f(x_0) \quad \forall x \in [a,b]$

$\exists x_1 \in [a,b]$ tale che $f(x) \ge f(x_1) \quad \forall x \in [a,b]$

cioè f ammette massimo e minimo in $[a,b]$

attenzione: NON È detto x_0, x_1 siano UNICI!

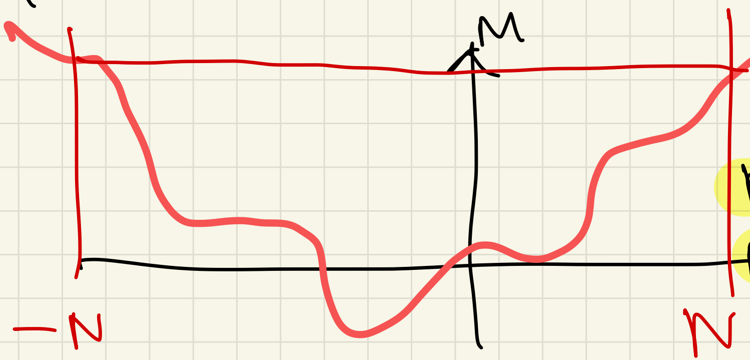
attenzione serve che l'intervallo sia chiuso e limitato (ex e^x è continua su un intervallo ma non ha massimo e minimo!)

Una applicazione: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

f NON HA MASSIMO

f continua su un intervallo → il suo grafico non ha interruzioni



fissato $M>0$ $\exists N$ tale che

per $x > N$ → $f(x) > M$ $\left(\lim_{x\to+\infty} f = +\infty\right)$

per $x < -N$ → $f(x) > M$ $\left(\lim_{x\to-\infty} f = +\infty\right)$

$\Rightarrow$ f ristretta all'intervallo $[-N,N]$ è continua.

fuori dall'intervallo $f(x) > M$!

applico WEIERSTRASS e ho che f ha massimo e minimo nell'intervallo $[-N,N]$.

il massimo non mi interessa

però se x_1 è pto di minimo cioè $f(x_1) \le f(x)$ $\forall x \in [-N,N]$

si ha che $f(x_1) \le f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

dato che fuori da intervallo $f(x) > M$!

$\rightarrow$ x_1 è pto di MINIMO GLOBALE.