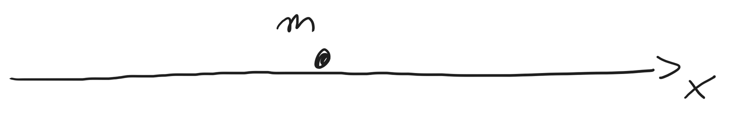
ODE con condizioni al contorno

Es



$F(x,v,t)$

$$\frac{d^2 x}{dt^2}(t) = \frac{F(x,v,t)}{m}$$

$x(t)$ è le nostre incognite

$v(t) = \frac{d}{dt}x(t)$

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ \frac{F(x(t), v(t), t)}{m} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\vec{y}(t) = \vec{f}(t)}$$

per t_0

$x(t_0) = x_0$ e $v(t_0) = v_0$

$$\vec{Y}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

in tal modo le condizioni iniziali sono

$$\boxed{\vec{y}(t_0) = \vec{Y}_0}$$

Se l'ordine dell'ODE è m ho che

$$\frac{d^m x}{dt^m}(t) = f\left(x(t), \frac{d}{dt}x(t), \dots, \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}x(t), t\right)$$

le condizioni iniziali sono

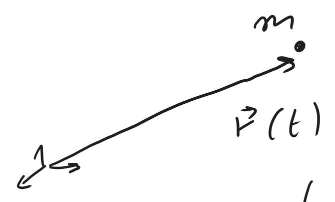
$$x(t_0) = x_0$$
$$\frac{d}{dt}x(t_0) = x_0^{(1)} \qquad \text{con } x \in \mathbb{R}^N$$
$$\vdots$$
$$\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}x(t_0) = x_0^{(m-1)}$$

Definiamo

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \frac{d}{dt}x(t) \\ \vdots \\ \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}x(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}x(t) \\ \frac{d^2}{dt^2}x(t) \\ \vdots \\ \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}x(t) \\ f\left(x(t), \frac{d}{dt}x(t), \dots, \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}x(t), t\right) \end{pmatrix}$$

Esempio



punto materiale

$\vec{r}(t) = (r_x(t), r_y(t), r_z(t))$

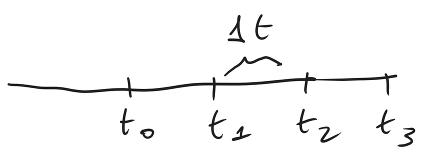
$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} r_x(t) \\ r_y(t) \\ r_z(t) \\ v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad \begin{pmatrix} r_x(t) & r_y(t) & r_z(t) \\ v_x(t) & v_z(t) & v_y(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{Y}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0^{(1)} \\ \vdots \\ x_0^{(m-1)} \end{pmatrix} \qquad \vec{y}(t_0) = \vec{Y}_0$$

Dobbiamo risolvere

$$\frac{d}{dt}\vec{y}(t) = \vec{f}(t)$$

Discretizziamo t



$$t_n = t_0 + \underbrace{\Delta t}_{\text{spaziatura}}\, n$$

Chiamo $\vec{Y}_n = \vec{y}(t_n)$

Proviamo

$$\vec{Y}_{n+1} = \vec{Y}_n + \vec{f}(\vec{y}(t_n), t_n)\Delta t$$

METODO DI EULERO ESPLICITO

$$\vec{Y}_{n+1} = \vec{Y}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \vec{f}(y(t), t)\,dt$$

con i rettangoli naïf

$$\vec{Y}_{n+1} = \vec{Y}_n + \vec{f}(\vec{y}(t_n), t_n)\Delta t + O(\Delta t^2)$$

METODO DI EULERO IMPLICITO

$$\vec{Y}_{n+1} = \vec{Y}_n + \vec{f}(\underbrace{\vec{y}(t_{n+1})}_{\vec{Y}_{n+1}}, t_{n+1})\Delta t + O(\Delta t^2)$$

METODO DI STÖRMER-VERLET O LEAP-FROG

$$\vec{Y}_{n+1} = \vec{Y}_{n-1} + 2\vec{f}(\vec{y}(t_n), t_n)\Delta t + O(\Delta t^3)$$

METODO DI CRANK-NICOLSON

$$\vec{Y}_{n+1} = \vec{Y}_n + \frac{1}{2}\left(\vec{f}(\underbrace{\vec{y}(t_{n+1})}_{\vec{Y}_{n+1}}, t_{n+1}) + \vec{f}(\vec{y}(t_n), t_n)\right)\Delta t + O(\Delta t^3)$$