$f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

D = dominio (naturale)
(insieme maggiore possibile
di numeri reali su cui
abbia senso calcolare
la funzione f).

Immagine di f = {numeri reali $y \in \mathbb{R}$ tali che
$y = f(x)$ per qualche $x \in D$}

valori che la
funzione assume.

$$x \longmapsto \lg_e x$$

$\lg x$ è quel numero
tale che
$e^{\lg x} = x$

$x \longrightarrow \lg x$

(a x associo e neo esponente in base e)

$1 \longmapsto \lg 1 = 0$

$e \longmapsto \lg e = 1$

$e^{-2} \longrightarrow \lg e^{-2} = -2 \ldots$

$2 \longmapsto \lg 2 \in (0,1)$

$3 \longmapsto \lg 3 > 1$

$a > b > 0$

$\Downarrow$

$\lg a > \lg b$

$\lg 2 > \lg 1 = 0$

$\lg 2 < \lg e = 1$

$(e = 2,7\ldots)$

$\lg 3 > \lg e = 1$

DOMINIO NATURALE: per quali x reali posso calcolare $\lg x$?

$x = e^{\lg x}$ $D = \{x > 0\}$

DOMINIO $= (0, +\infty)$

$(0,+\infty) \to (-\infty,+\infty)$

$x \longrightarrow \lg x$ $\qquad D=(0,+\infty) = \{x \in \mathbb{R},\ x>0\}$

Immagine $= ?$ valori che può assumere

$\lg x$

$0 \in$ immagine $\qquad \lg 1 = 0$

0 è un valore che il logaritmo assume

tutti i numeri negativi e tutti i numeri positivi

$\boxed{c = \lg e^c \quad \forall c \in \mathbb{R}}$

$c \in \mathbb{R} \longrightarrow \underbrace{e^c}_{} = x \qquad \lg x = c$

Immagine $= \mathbb{R} = (-\infty,+\infty)$

Non chiederò mai di determinare l'immagine di una funzione, ma verrà chiesto di determinare il SEGNO di f.

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Determinare il segno di f significa trovare per quali $x \in D$ / $\boxed{f(x) \geq 0}$

Nel caso del logaritmo $\qquad c = \lg e^c$

$\lg x \geq 0 \iff \underline{\lg x \geq \lg 1} = 0$

$\Updownarrow$

$x \geq 1$

$f(x) \geq 0$
per $x \in D$

$D = (0, +\infty)$

$\lg(x) > 0$ se $x > 1$

$\lg x = 0$ se $x = 1$

$\lg x < 0$ se $0 < x < 1$

Def Diciamo che una funzione è LIMITATA (limitata superiormente o limitata inferiormente)

se la sua immagine è limitata (o limitata ~~infer~~ superiorm. o lim. infer.)

$$\boxed{f \text{ è LIMITATA se esistono } C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad C_2 \le f(x) \le C_1 \quad \forall x \in D}$$

f è LIMITATA SUPERIORM se esiste C_1 $\quad f(x) \le C_1 \ \forall x \in D$

" " " INFERIORM se esiste C_2 $\quad \underline{f(x) \ge C_2} \ \forall x \in D$

$$f(x) = 1 - x^2 \qquad x \to x^2 \to -x^2 \to 1-x^2$$

$$x \longmapsto 1 - x^2$$

DOMINIO NATURALE = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

$1 - x^2 \leq 1$ (perché $-x^2 \leq 0$)

$f(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ è SUPERIORM. LIMITATA

$\exists\, C_2 \in \mathbb{R}$ tale che $1 - x^2 \geq C_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$?

NON E' POSSIBILE | $\boxed{x^2 \leq 1 - C_2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

NON E' INF. LIMITATA

segno $\quad f(x) \geq 0$

$$1 - x^2 \geq 0$$

$$-1 + x^2 \leq 0$$

$$\boxed{x^2 - 1 \leq 0}$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

$f(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) > 0$ se $-1 < x < 1$

$f(x) = 0$ se $x = 1,\ x = -1$

$f(x) < 0$ se $x > 1,\ x < -1.$

(Immagine $\underline{(-\infty, 1]}$)

Es $\quad x \longrightarrow 2^x$

$D = \mathbb{R}$

$2^0 = 1 \quad \ldots 2^4$

$2^{-5} = \frac{1}{2^5} \quad \ldots$

$2^x \overset{?}{\geq} 0$

2^x è sempre $> 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

MAI 0!

(segno $f(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$)

$f(x) > 0 \quad \forall x \Rightarrow$ f è LIMITATA INFERIORMENTE

$\exists C_1 ? \quad f(x) \leq C_1 \quad \forall x ?$

$\exists\, C_1$ tale che $\boxed{0 < 2^x \leq C_1}\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\vee$
0

$C_1 = 2^{\log_2 C_1}$

$$2^x \leq 2^{\log_2 C_1} \Rightarrow x \leq \log_2 C_1$$

NON ESISTE C_1, 2^x NON È LIM. SUPERIORM.

Immagine di 2^x è $(0, +\infty)$

Dominio è $\mathbb{R}$

se $a>0$ $a\neq 1$

$x \longmapsto a^x$

$D=\mathbb{R}$

Immagine $(0,+\infty)$

$a^x>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$x \longrightarrow \lg x$

$D=(0+\infty)$

$\lg x>0 \iff x>1$

Immagine $=\mathbb{R}$

Esempio

$x \mapsto -2x$

- funzioni lineari $\quad a \in \mathbb{R}$

$$f : x \longmapsto ax \qquad (\text{es } x \longmapsto \underline{\underline{3x}})$$

$$\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$$

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

$$a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2$$

$f :$

$$D = \mathbb{R}$$

segno $f(x) \geq 0 \qquad ax \geq 0 \iff$ $\begin{cases} a > 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$

$a < 0$

$x \leq 0$

es $\quad x \longmapsto |x|$

$D = \mathbb{R}$

$|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

limitata inferiormente. $\qquad$ Immagine $[0, +\infty)$

---

es $\quad x \longmapsto x^n \qquad D = \mathbb{R}$

n pari $\quad x^n \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

n dispari $\quad x^n \geq 0 \iff x \geq 0$

es $\quad x \longrightarrow x^{-n} = \dfrac{1}{x^n} \qquad n \in \mathbb{N}$

$$D = \{x \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

n pari $\quad \dfrac{1}{x^n} > 0 \quad \forall x \neq 0$

n dispari $\quad \dfrac{1}{x^n} > 0 \iff x > 0$

—

es $\quad x \longmapsto \sqrt[n]{x}$

n pari

$D = \{ \cancel{x} \geq 0 \} = [0, +\infty)$

$\sqrt[n]{\cancel{x}}$ esiste n pari solo se $x \geq 0$

$\sqrt[n]{x} \geq 0 \quad \forall x \geq 0$.

---

n dispari

$D = \mathbb{R}$

$\sqrt[n]{x} \geq 0 \iff x \geq 0$

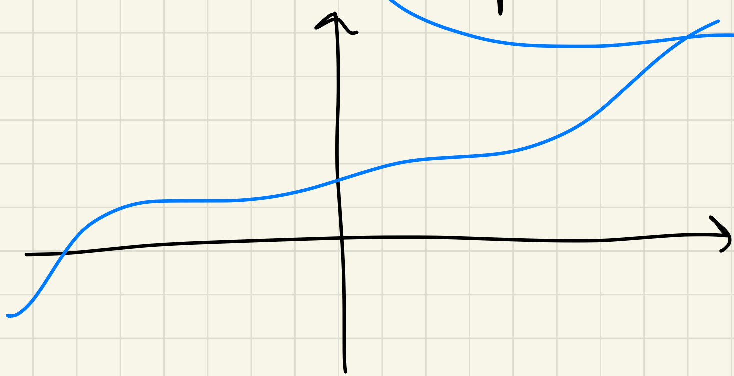
GRAFICO di una funzione

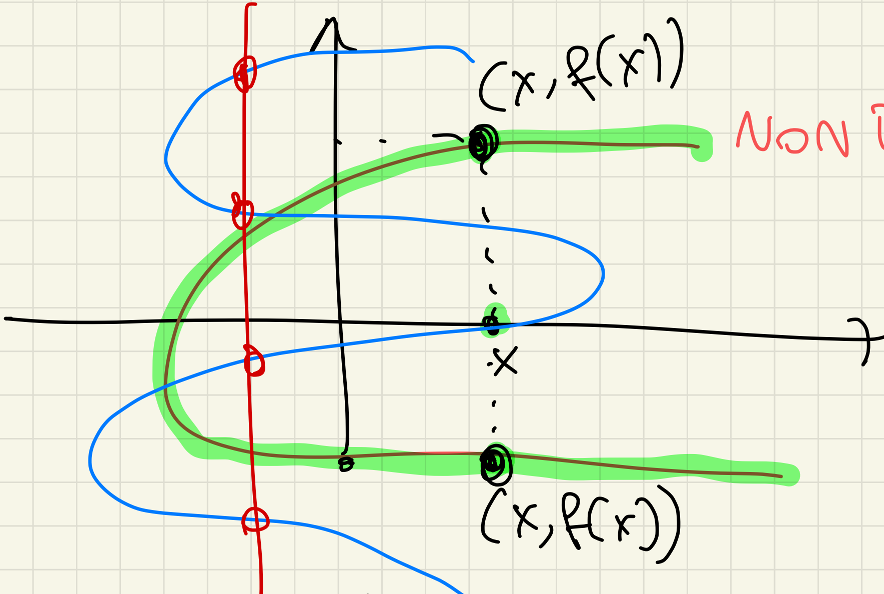
$$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Grafico $= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tale che $x \in D$, $y = f(x) \}$

$=$ curva sul piano cartesiano di equazione $y = f(x)$ $\quad x \in D$

$x \in D$ — $f(x) = y$





NON PUÒ essere grafico di nessuna funz.

una curva del piano PUÒ ESSERE GRAFICO di una funzione se intersezione con ogni retta verticale è 1 punto o nessun punto

ho 2 pti della curva verde che hanno le stesse coordinata x e 2 diverse coordinate y ma $y = f(x)$

y è UNICA

es. $x \longmapsto \lg x$ $D=(0,+\infty)$

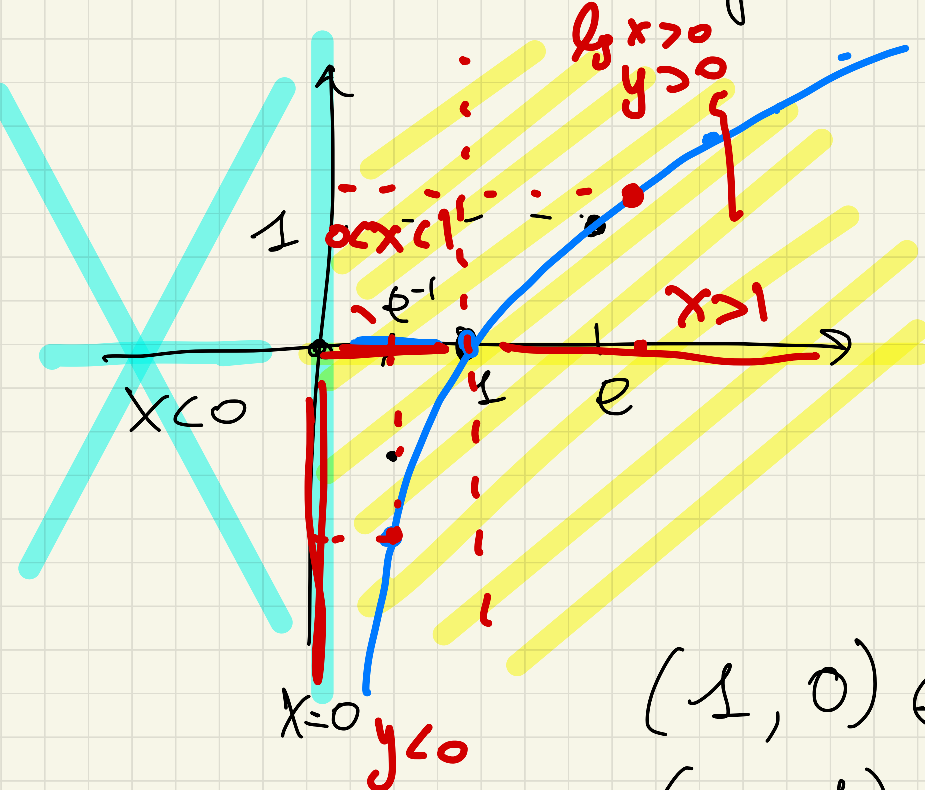


grafico è la curva di tutti i pti di coordinate

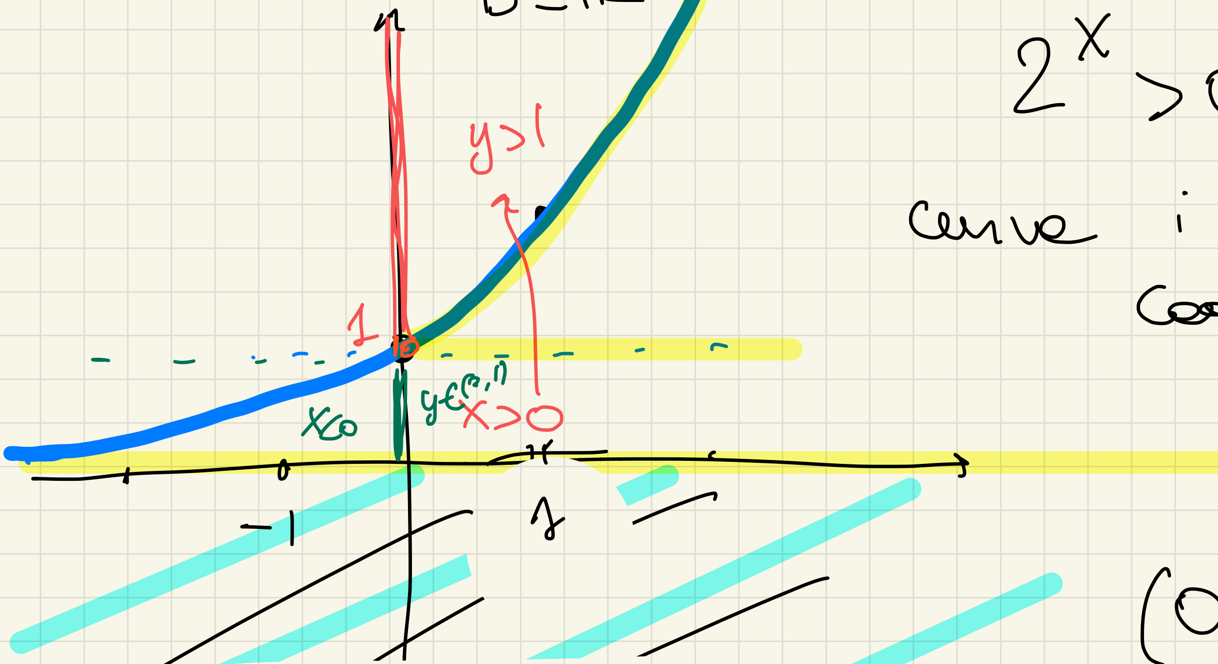
$(x, \lg x)$ $x>0$

$(1,0) \in$ grafico

$(e,1)$ $(e^{-1}, -1)$
$\qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{\lg(e^{-1})}$

es: $x \longrightarrow 2^x$

$D = \mathbb{R}$



$2^x > 1 = 2^0$

$\Updownarrow$

$x > 0$

$x \longrightarrow \underline{\underline{a}}^x$

$$\boxed{\begin{array}{c} a > 1 \\ \hline\hline a^b > a^c \\ \Updownarrow \\ b > c \end{array}}$$

$2^x > 0$

curve i cui pti hanno coord $(x, \underline{\underline{2^x}})$

$\Downarrow$

$y > 0$

$(0, 1) = (0, 2^0)$

$(1, 2)$

$(-1, \frac{1}{2}) = (-1, 2^{-1})$

es: $x \longrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x$

$0 < a < 1$

$a^b > a^c$

$\Updownarrow$

$b < c$

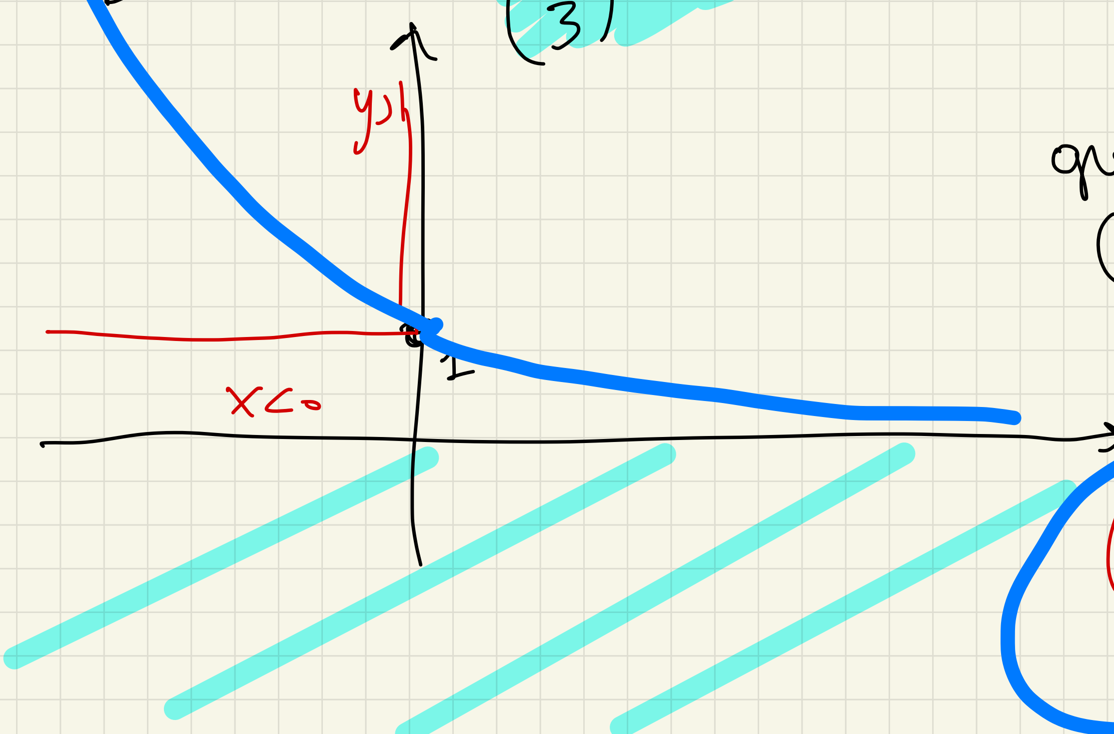
$D = \mathbb{R}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x > 0 \quad \forall x$

grafico

$\left(x, \left(\frac{1}{3}\right)^x\right)$

$(0, 1)$



$\left(\frac{1}{3}\right)^x > 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^0$

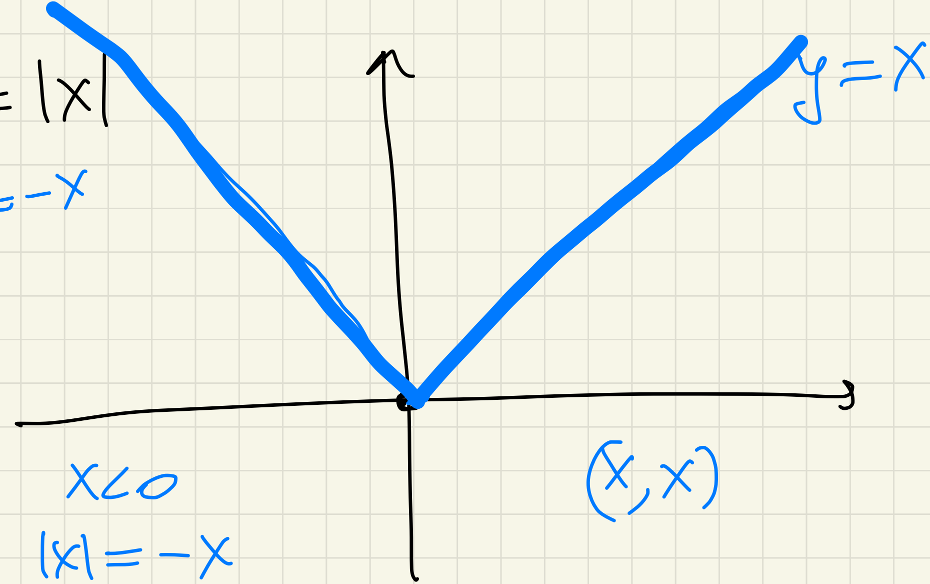
$\Updownarrow$

$x < 0$

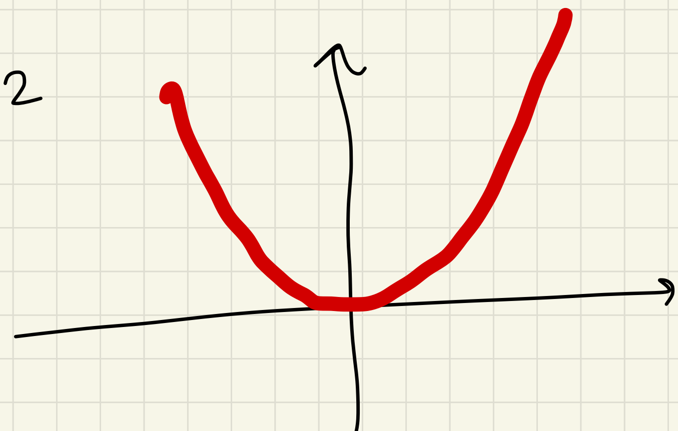
es $f(x) = |x|$

$(x, |x|)$

$y = -x$



es $f(x) = x^2$



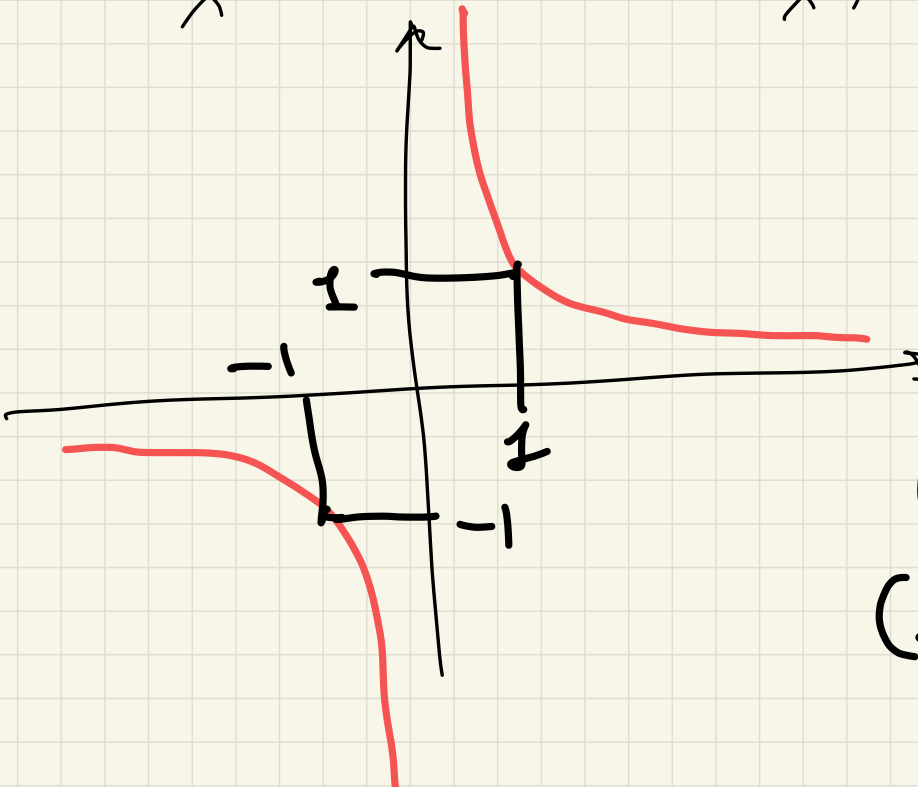
$(x, \underline{\underline{x^2}})$

$\downarrow$

$y = x^2$

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad (x, \frac{1}{x})$ $\quad x \neq 0$

$$y = \frac{1}{x}$$



$(1,1) \in$ grafico

$(-1,-1) \in$ grafico

SIMMETRIE (parliamo di simmetria del grafico)

La maggior parte delle funzioni NON HA SIMMETRIE.

Dico che f è PARI (ha SIMMETRIA PARI)

1) se $\forall x \in D$ anche $-x \in D$ (dominio è simmetrico rispetto a 0)

2) $\forall x \in D \quad f(x) = f(-x)$

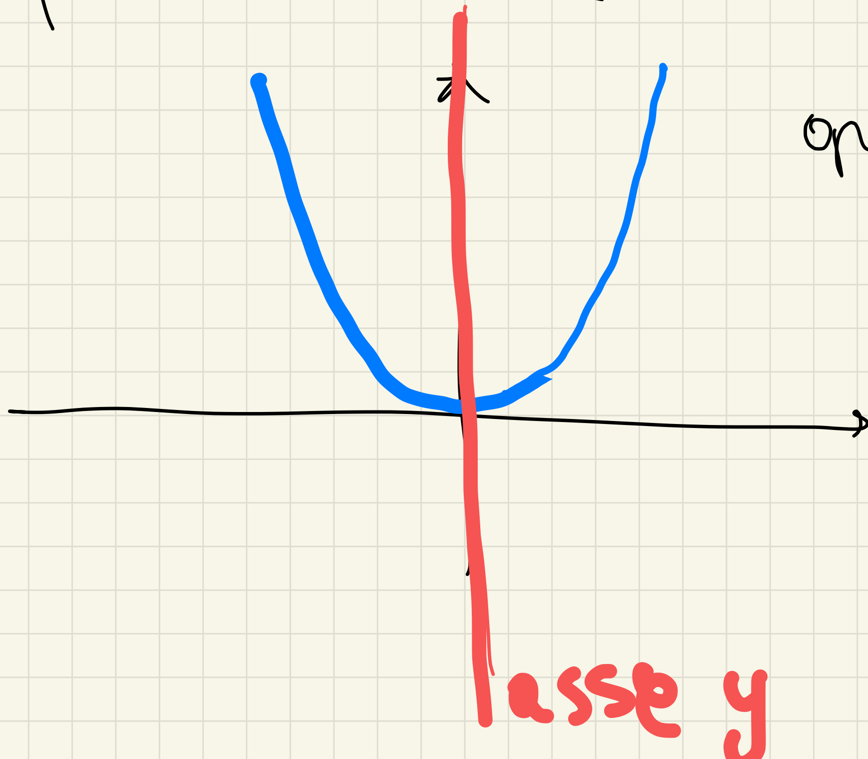
GRAFICO è SIMMETRICO RISPETTO all'asse delle y.

$f(x) = x^4$ $\quad D = \mathbb{R}$ $\quad x \in D \Rightarrow -x \in D$

$$f(x) = x^4 = (-x)^4 = f(-x)$$

grafico $y = x^4$

(x, y)

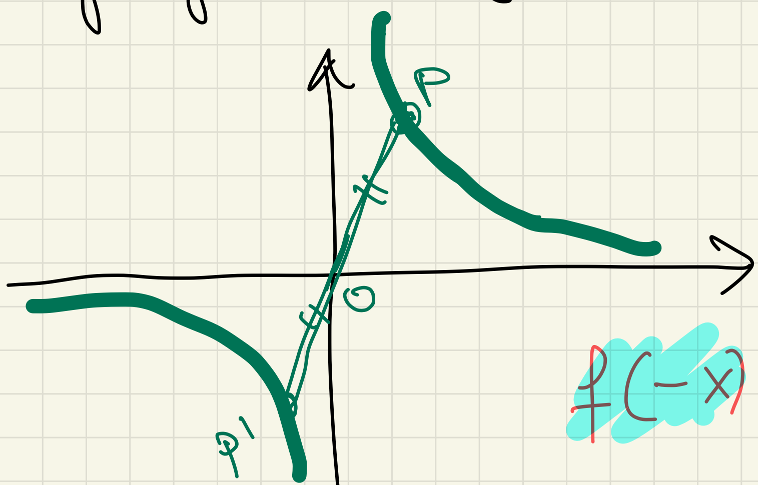


f è DISPARI (o ha SIMM. DISPARI)

se

1. se $x \in D$ allora $-x \in D$
2. $f(-x) = -f(x)$

grafico è simmetrico rispetto a $(0,0)$



$f(x) = \frac{1}{x}$ $D = \{x \neq 0\}$

$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

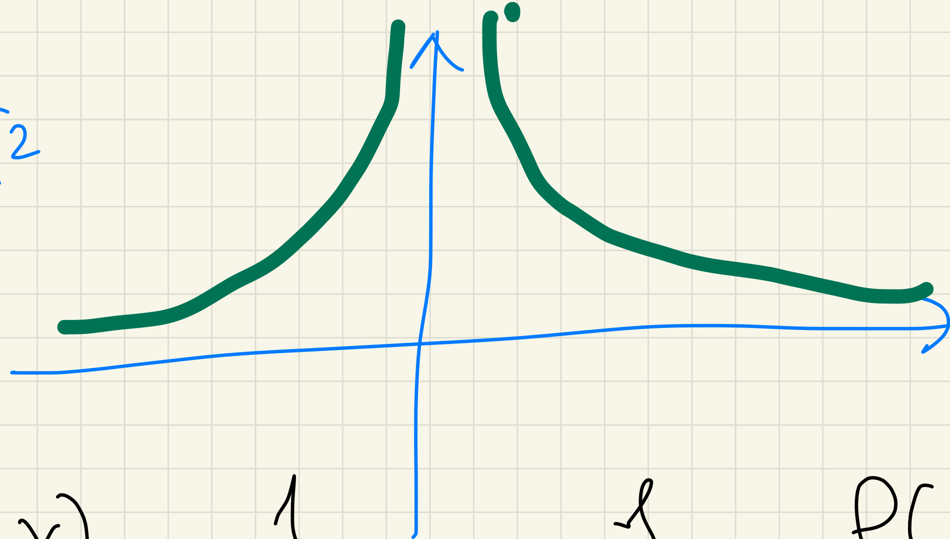
$x \in D$ $(x \neq 0) \Rightarrow -x \neq 0$

$-x \in D$

$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$D = \{x \neq 0\}$$



$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2} = f(x)$$

Def f si dice (MONOTÒNA) CRESCENTE

se $\forall\, a, b \in D$ $\quad a < b$

si ha $\quad f(a) \leq f(b)$

(f mantiene le disuguaglianze tra pti del dominio)

f si dice (MONOTONA) STRETTAM. CRESCENTE

$a, b \in D \quad a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$

---

es $\quad 0 < a < b \Rightarrow \lg a < \lg b$ $\quad$ LOGARITMO È STRETT. CRESCENTE

$f(x) = x^3$ è strett crescente

$$a < b \Rightarrow a^3 < b^3$$

$f(x) = x^2$ NON È CRESCENTE

$$a < b \not\Rightarrow a^2 \le b^2$$

$$-2 < 1 \Rightarrow (-2)^2 = 4 \not\le 1^2$$

$f(x) = a^x \quad a > 1$ è strett. crescente

$b > c \Rightarrow a^b > a^c$

$0 < a < 1 \quad f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

$b > c \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^b < \left(\frac{1}{3}\right)^c$

$<$ $\quad$ $>$

STRETT. DECRESCENTE

f è MONOTONA DECRESCENTE $a, b \in D \quad a < b$

$\Rightarrow f(a) \geq f(b)$

MONS. STRETT DECRES

$a < b \quad a, b \in D \Rightarrow f(a) > f(b)$.