METODI STATISTICI PER LA BIOINGEGNERIA

Laboratorio 1

A.A. 2024-2025

Enrico Longato

Grazie alla Prof.ssa Alessandra Bertoldo e al Dott. Marco Castellaro per la versione iniziale delle slide.

Le ore di laboratorio sono materia d'esame

L'esame prevede una prova pratica di MATLAB che peserà per <u>più di un terzo</u> sul voto totale dell'esame.

In pratica:

- Avrete 60 minuti per svolgere 4 esercizi MATLAB, da 3 punti ciascuno, al calcolatore.
- Ciascun esercizio sarà composto da una parte di produzione del codice "da zero" e da una o più richieste di commento sul risultato ottenuto.
- Dunque, è importante sia **saper scrivere codice a partire da un file vuoto**, sia comprendere e **saper commentare quanto codificato**.

ISCRIZIONE CORSO SU STEM ELEARNING

https://stem.elearning.unipd.it/course/view.php?id=9674

N.B. accedere con modalità SSO (= "attraverso UNIWEB") con la mail @studenti.unipd.it

Nella pagina elearning del corso troverete, per ciascuna esercitazione:

- Una copia delle slide mostrate a lezione.
- I file da scaricare per svolgere l'esercitazione in aula.
- **Dopo la lezione,** un file .m con la soluzione proposta.

Università degli Studi di Padova

Laboratorio 1: Contenuti e obiettivi

1. Esercitazione "alla lavagna"
    - Basi dell'ambiente di sviluppo MATLAB (v. lezione 1 di teoria)
    - Indicizzazione di matrici
    - Operazioni tra vettori
2. Esercizi da svolgere in autonomia (per superare la "paura del file bianco")
    - Autovettori, autovalori, inversa di matrice
    - Massimo e minimo
    - Generazione di sequenze (vettori equispaziati, in scala lineare, in scala logaritmica)
3. Ripasso di teoria (**parte integrante del programma d'esame di teoria!**)
    - Norma di un vettore
    - Autovettori e autovalori
    - Inversa di matrice

Prima di svolgere l'esercitazione (oppure al bisogno), utilizzare il comando help di MATLAB seguito dal nome delle seguenti function, utili allo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 1 (svolto)

- find, size, sub2ind, ind2sub

Esercizio 2 (svolto)

- norm

Esercizio 3 (proposto)

- rank, eig, inv, min, max

Esercizio 4 (proposto)

- linspace, logspace, horzcat

```
>> help find
 find - Find indices and values of nonzero elements
    This MATLAB function returns a vector containing the linear indices of
    each nonzero element in array X.

    Syntax
      k = find(X)
      k = find(X,n)
      k = find(X,n,direction)

      [row,col] = find(___)
      [row,col,v] = find(___)

    Input Arguments
      X - Input array
        scalar | vector | matrix | multidimensional array
      n - Number of nonzeros to find
        positive integer scalar
      direction - Search direction
        'first' (default) | 'last'

    Output Arguments
      k - Indices to nonzero elements
        vector
      row - Row subscripts
        vector
      col - Column subscripts
        vector
      v - Nonzero elements of X
        vector
```

ESERCIZIO 1 (svolto)

- Creare una matrice 3x4 con i seguenti elementi e inserirla in una variabile chiamata mat2D

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Trovare l'indice dell'elemento cerchiato (criterio "== 2") utilizzando **`find`**
- Tradurre l'indice lineare in formato riga/colonna utilizzando **`ind2sub`**
- Ricavare viceversa l'indice lineare a partire dalla coppia riga/colonna (**`sub2ind`**)

- Vettorizzare la matrice ottenuta, creare una nuova matrice delle dimensioni originali e inserire al suo interno gli elementi della matrice vettorizzata

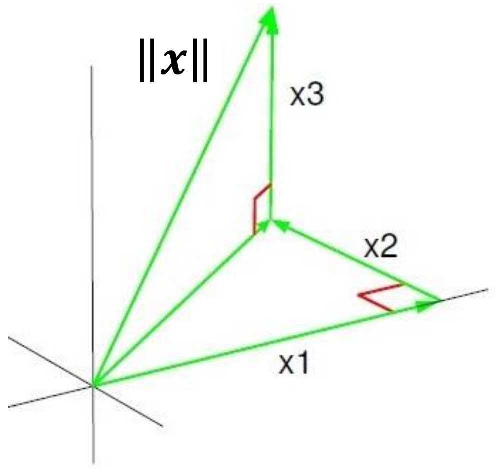
Ripasso: norme e distanze

Norma euclidea

Sia $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ un vettore appartenente a $\mathbb{R}^N$.

Si definisce **norma euclidea** di $\boldsymbol{x}$ lo <u>scalare</u>

$$\|\boldsymbol{x}\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2}$$



Norma p

In generale, la **norma p** di un vettore $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$ è uno <u>scalare</u>

$$\|\boldsymbol{x}\|_p := \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_N|^p}$$

Notare i valori assoluti delle componenti, che servono per le norme dispari; per esempio, la norma 1 è la somma dei valori assoluti delle componenti.

Distanza euclidea

Siano $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ due vettori appartenenti a $\mathbb{R}^N$.

La distanza euclidea tra $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ è la norma euclidea della loro differenza, ovvero lo <u>scalare</u>

$$dist(x, y) := \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_N - y_N)^2}$$

Ripasso: dimensioni del prodotto matriciale

Regole mnemoniche / di controllo per il prodotto tra matrici

1. Il prodotto tra matrici non è commutativo
$$AB \neq BA$$

2. Il prodotto tra matrici è definito (e, dunque, eseguibile) soltanto se il numero di colonne della prima matrice è uguale al numero di righe della seconda.
$$A_{3\times 7}B_{7\times 15} = W_{3\times 15}$$

3. Una matrice che è il risultato di una sequenza di prodotti matriciali ha tante righe quante la prima matrice della moltiplicazione e tante colonne quante l'ultima.
$$A_{3\times 7}B_{7\times 15}C_{15\times 6}D_{6\times 4} = Z_{3\times 4}$$

ESERCIZIO 2 (svolto)

- Creare due vettori riga (v1 e v2):

v1 = $[4 \quad 2 \quad 6]$ e v2 = $[3 \quad 15 \quad 7]$

- Calcolare A = $v1^T v2$
- Calcolare A1 = $v1 v2^T$
- Calcolare la norma euclidea del vettore v1 seguendo la formula: $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$
- Calcolare la norma del vettore v1 con la funzione **`norm`** e verificarne i risultati rispetto al punto precedente
- Estrarre dalla matrice A una sottomatrice B composta dalle ultime 2 colonne e dalla prima e ultima riga di A

$$\begin{bmatrix} 12 & \boxed{60 \quad 28} \\ 6 & 30 \quad 14 \\ 18 & \boxed{90 \quad 42} \end{bmatrix}$$

Ripasso: autovettori e autovalori (1 di 2)

Definizioni

Sia $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ una matrice quadrata di N righe e N colonne.
Se esistono un vettore $x \in \mathbb{R}^N$ e uno scalare λ (anche complesso) tali che

$$Ax = \lambda x$$

si dice che x è **autovettore** di A e λ il suo **autovalore** corrispondente.

Polinomio caratteristico

Trovare autovettori e autovalori è equivalente a risolvere il seguente sistema lineare (basta portare tutto a sinistra nell'equazione della definizione)

$$(A - \lambda I)x = 0$$

Gli autovalori (eventualmente complessi) sono gli <u>zeri del determinante di $A - \lambda I$</u>.

Ripasso: autovettori e autovalori (2 di 2)

Ricerca degli autovalori a partire dal polinomio caratteristico

Il determinante di $A - \lambda I$ è il **polinomio caratteristico** di A e si scrive

$$\mathrm{p}(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Gli autovalori di A, quindi, si ricavano risolvendo l'equazione

$$\mathrm{p}(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

Se $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\mathrm{p}(\lambda)$ è un polinomio di grado N in λ, ovvero la somma delle molteplicità (= quante volte annullano il polinomio) delle sue soluzioni (reali o complesse coniugate) è N.

Ripasso: invertibilità

Definizione

Una matrice $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ si dice singolare se il suo determinante è nullo.
Una matrice non singolare è invertibile.

Le seguenti affermazioni (e diverse altre) sono equivalenti al concetto di invertibilità.

- Il determinante di A non è nullo, cioè $\det(A) \neq 0$.
    - Conseguenza: 0 non è un autovalore di A; altrimenti si avrebbe che $\mathrm{p}(0) = \det(A - 0I) = \det(A) = 0$.
- Il rango di A (= numero di righe e/o colonne linearmente indipendenti) è uguale alla dimensione di A (in questo caso N)
- Esiste una matrice B tale che $AB = BA = I$; in quel caso scriviamo che $A^{-1} := B$ è la matrice inversa di A.

NB: solo le matrici quadrate possono essere o non essere invertibili. Per le matrici rettangolari si fa riferimento al concetto di pseudo-invertibilità, che riprenderemo quando parleremo di principal component analysis (PCA).

ESERCIZIO 3 (proposto, continua alla slide successiva)

- Si creino 2 matrici 4x4

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 2 & 7 & 3 \\ -8 & -9 & -10 & 5 \\ 9 & -6 & -10 & 3 \\ 10 & -3 & -7 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 & 1 \\ -3 & -5 & -7 & 4 \\ 6 & -1 & 0 & 2 \\ 12 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- Si calcoli il rango di entrambe le matrici (***rank***)
- Si calcolino gli autovalori di entrambe le matrici (**eig**)
- Si calcoli D= A inv(A)
- Si verifichi la differenza di utilizzare l'operatore / o \ per il calcolo dell'inversa: D= A inv(A) è equivalente a D=A/A?
- Si calcoli E=inv(A)*B con la dicitura standard e l'operatore \ e se ne verifichi l'equivalenza
- Si calcoli il prodotto elemento per elemento F=A.*B
- Verificare che è diverso dal prodotto matriciale A*B

ESERCIZIO 3 (proposto, continuazione)

- Trovare sia l'indice che le coppie riga/colonna di ogni elemento negativo della matrice F appena calcolata
- Cercare il massimo e il minimo della matrice A (suggerimento, vettorizzare la matrice) e trovarne l'indice lineare e le coppie/riga colonna
- Provare a ripetere l'operazione precedente non vettorizzando la matrice

ESERCIZIO 4 (proposto)

- Generare i seguenti vettori discreti
  - Intervallo j1 [0,50] con passo 1 (si usi l'operatore `:`)
  - Intervallo j2 [0,50] con passo 0.5 (si usi l'operatore `:`)
  - Intervallo j3 [501,1000] con passo 0.5, utilizzando la funzione **`linspace`**
  - Concatenare per righe j1 e j3 facendo uso delle parentesi quadre o della funzione **`horzcat`**, nominando il nuovi intervallo "spezzato" j4
  - Intervallo j5 [1,100] con 10 punti e spaziatura logaritmica (**`logspace`**)