Generazione di numeri casuali
Simulazione con Excel

prof.ssa C. De Francesco

Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Matematica “Tullio Levi-Civita”

Ottimizzazione Stocastica

Numeri casuali

Vogliamo generare numeri casuali con le seguenti proprietà:

- Distribuiti uniformemente fra 0 e 1
- Statisticamente indipendenti
- Che cambiano automaticamente ogni volta che il foglio viene aggiornato
- Riproducibili, quando necessario
- Utili come “mattoni” per costruire modelli di simulazione più complessi

Numeri [pseudo]casuali in Excel funzione "CASUALE"

Formula per generare un singolo numero **pseudo-casuale** in [0,1):

= CASUALE()   oppure   = RAND()

Quando viene copiata in altre celle, vengono generati numeri casuali differenti (la funzione comprende la rigenerazione del seme)

Si basa su *generatori congruenziali lineari*, ad esempio

$$Y_{i+1} \equiv aY_i + c \ (mod\ m)$$

per opportuni valori dei parametri a, c ed m, con Y_0 dato detto seme, e poi

$$X_i = Y_i/m$$

[leggi Ghiani Musmanno, sez. 2.4.1, oppure Larson Odoni, sez. 7.1.1]

Esercizio:
generare 500 numeri casuali

- Inserire =CASUALE() in una cella
- Copiarla in altre 499 celle
- Premere il tasto “ricalcola” (il tasto F9) più volte:

  tutti i numeri casuali cambiano

Esercizio:
calcolare le frequenze empiriche

Costruire una tabella delle frequenze con cui appaiono i numeri casuali:

1. Costruire una colonna di valori “bin values” (gli estremi superiori delle categorie): 0.1, 0.2, fino a 0.9
2. Evidenziare le celle in una colonna adiacente (con una cella in più)
3. Inserire la formula =FREQUENZA(*matrice_dati; matrice_classi*) e premere Ctrl-Shift-Enter (in inglese è =FREQUENCY(*matrice_dati;matrice_classi*)

Esercizio: generare un istogramma

- Creare un istogramma dalla tabella delle frequenze
- La proprietà di uniformità implica che l'istogramma dovrebbe essere ragionevolmente "piatto"
- Il grafo è "vivo":
  premere il tasto F9 per vedere cosa succede

Esercizio:
Congelare i numeri casuali

- Copiare i 500 numeri casuali dal foglio originale su un altro foglio mediante l'opzione incolla speciale / Valore
- I valori copiati sono ora *"congelati"* (non cambiano premendo il tasto F9)
- Congelare i numeri casuali è utile a volte (ma non sempre) per esempio per confrontare strategie diverse

Testa o Croce?
Simulare il lancio di una moneta

- Affibbiare dei numeri agli eventi “testa” e “croce”, ad esempio:

  1 = TESTA

  0 = CROCE
- Generare un numero casuale: CASUALE()
- Trasformarlo ai fini dell’esperimento corrente:

  = ?

Testa o Croce?
Simulare il lancio di una moneta

- Affibbiare dei numeri agli eventi “testa” e “croce”, ad esempio:

  1 = TESTA

  0 = CROCE
- Generare un numero casuale: CASUALE()
- Trasformarlo ai fini dell’esperimento corrente:

  = INT(2*CASUALE())

  [INT(x) arrotonda per difetto all’intero più vicino]
- Reinterpretare il risultato

Lancio di un dado

- Affibbiare dei numeri agli eventi:

  1 = faccia con 1 puntino

  …

  6 = faccia con 6 puntini
- Generare un numero casuale: CASUALE()
- Adattare all’esperimento corrente:

  = ?

Lancio di un dado

- Affibbiare dei numeri agli eventi:

  1 = faccia con 1 puntino

  …

  6 = faccia con 6 puntini
- Generare un numero casuale: CASUALE()
- Adattare all'esperimento corrente:

  = INT(1+6*CASUALE())
- Reinterpretare il risultato

Simulare una data di compleanno

- Affibbiare dei numeri agli eventi:

  1 = 1 gennaio

  …

  365 = 31 dicembre
- Generare un numero casuale: CASUALE()
- Adattare all'esperimento corrente:

  = ?

Simulare una data di compleanno

- Affibbiare dei numeri agli eventi:

  1 = 1 gennaio

  …

  365 = 31 dicembre
- Generare un numero casuale: CASUALE()
- Adattare all'esperimento corrente:

  = INT(1+365*CASUALE())
- Reinterpretare il risultato

Generazione di una distribuzione discreta non uniforme

- Colonna dei valori
- Colonna delle probabilità
- Colonna delle probabilità cumulate (partendo da 0)
- Colonna dei valori (copia *shiftata*)
- Generare un numero casuale: CASUALE()
- Funzione CERCA.VERT(val; matrice; numero colonna)

  [in inglese è la funzione VLOOKUP]

Generazione di distribuzioni continue

Problema:
data X v.a. continua, con funzione di ripartizione $P(X \leq x) = F_X(x)$ e densità $f_X(x)$
generare una sua realizzazione *x*

Metodo della trasformazione inversa: applicabile quando F_X è invertibile (in linea di principio, anche se si può estendere la sua applicazione)

Metodo di accettazione e rigetto: applicabile se f_X è limitata (e a supporto limitato)

Metodo della trasformazione inversa

Problema:
data X v.a. continua, con funzione di ripartizione $P(X \leq x) = F_X(x)$
generare una sua realizzazione *x*

- Sia *u* una realizzazione di $U = U[0,1)$
- Una realizzazione *x* di *X* si ottiene da

$$\boldsymbol{x = F_X^{-1}(u)}$$

Perché funziona?

Perché le v.a. $F_X^{-1}(U)$ e X hanno la stessa distribuzione:

$$P[F_X^{-1}(U) \leq x] = P[U \leq F_X(x)] = F_X(x) = P[X \leq x]$$

Generare un numero casuale da una UNIFORME fra *a* e *b*

$X \sim U[a,b)$

- $f(x) = 1/(b-a)$ per $a \leq x < b$
- $F(x) = (x-a)/(b-a)$ per $a \leq x < b$
- $F^{-1}(y) = a + (b-a)\, y$
- genero un numero casuale *u* tramite la funzione CASUALE()
- $x = a + (b-a)\, u$ è una realizzazione della v.a. X

Generare un numero casuale da una EXPONENZIALE di media $1/\lambda$

$X \sim Exp(\lambda)$

- $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$ per $x \geq 0$
- $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$ per $x \geq 0$
- $F^{-1}(y) = -1/\lambda \ln(1-y)$
- genero un numero casuale *u* tramite la funzione CASUALE()
- $x = -1/\lambda * LN(u)$ è una realizzazione della v.a. X

Generare un numero casuale da una NORMALE(μ, σ)

X~N(μ, σ)

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp[-(x-\mu)^2 / 2\sigma^2]$
- genero un numero casuale *u* tramite la funzione CASUALE()
- *x* = INV.NORM.N(*u*; μ; σ)

  [in inglese è la funzione NORM.INV]

Funzione già definita in Excel (per fortuna, altrimenti dovremmo invertire la F(x)…)

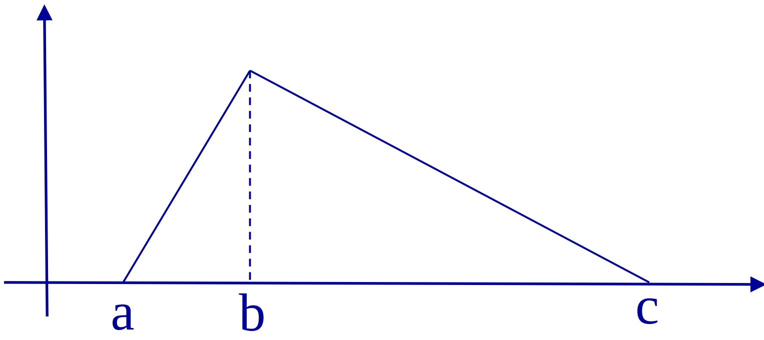
Generare un numero casuale da una distribuzione TRIANGOLARE

X~Triang(a,b,c)

a = valore minimo

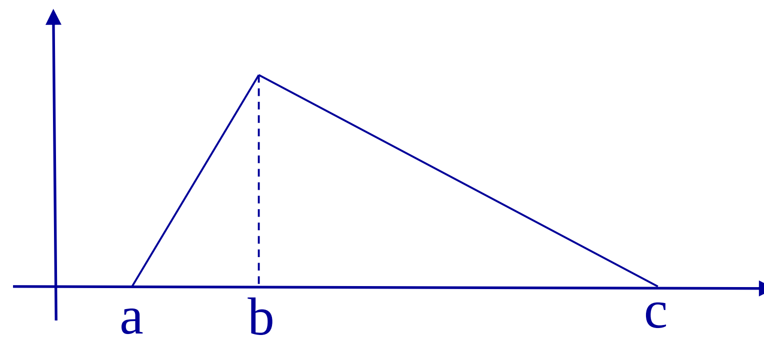
b = valore più probabile

c = valore massimo



Generare un numero casuale da una distribuzione TRIANGOLARE

X~Triang(a,b,c)



- $F(x) = (x-a)^2 / [(c-a)(b-a)]$ $\quad x \in [a,b]$
  $= 1- (c-x)^2 / [(c-a)(c-b)]$ $\quad x \in [b,c]$

- definisco $d = F(b) = (b-a)/(c-a)$

  $F^{-1}(y) = a + (c-a)\,(yd)^{1/2}$ $\quad y\in [0,d]$
  $= a + (c-a)(1-[(1-d)(1-y)]^{1/2})$ $\quad y\in [d,1]$

- u = CASUALE()

$$\boxed{x = a+(c-a)*SE\{u<d;\ RADQ(ud);\ 1-RADQ[(1-d)(1-u)]\}}$$

Metodo di accettazione e rigetto densità $f(x) \leq M$; $a \leq x \leq b$

1. generare u_1 e u_2 secondo U[0,1]
2. calcolare x e y dentro

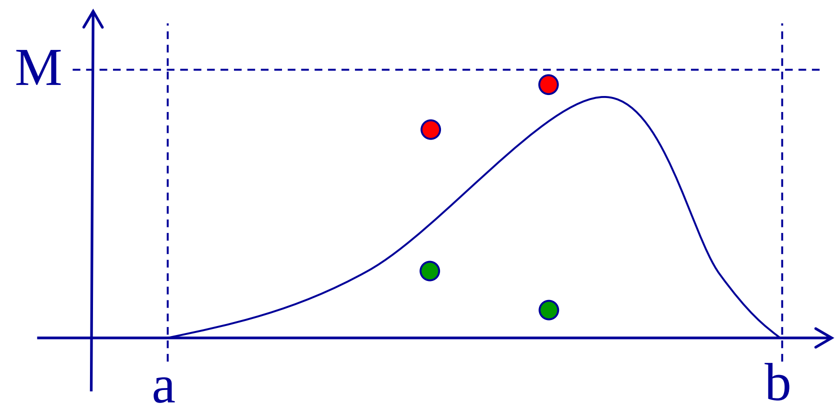
   $$x = a + u_1 (b-a)$$

   $$y = u_2 M$$

3. accetta x se

   $$y \leq f(x)$$

   altrimenti rifiuta x e torna al passo 1



Perché funziona?

- Intuitivamente: la probabilità di accettare x è legata a f(x)
- Formalmente: teorema di Von-Neumann (in lettura)