UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Laboratorio 3
Sistemi a tempo discreto

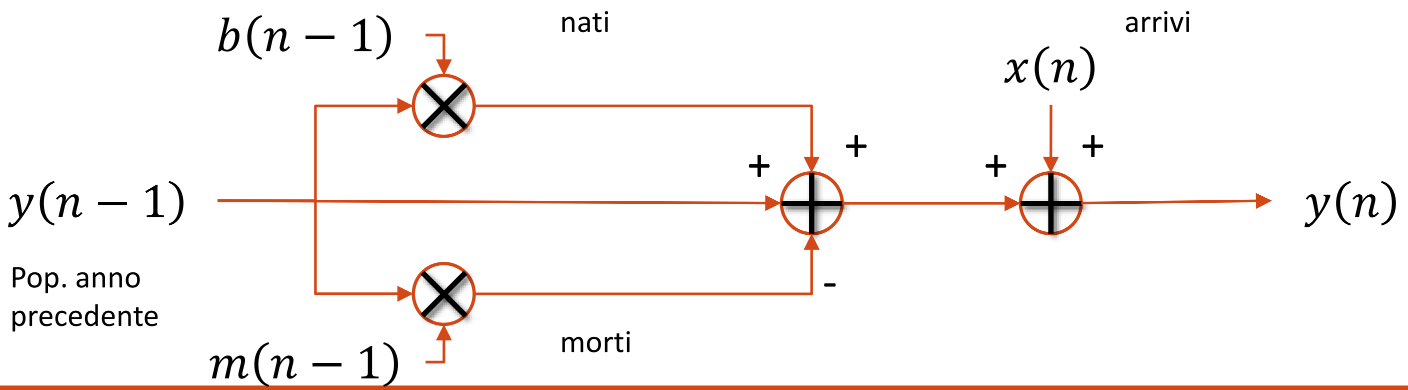
Un sistema ecologico: ipotesi

Sia $y(n)$ il numero di individui di una popolazione di una data specie nell'anno n

Supponiamo di conoscere tale valore per $n-1$ (condizione iniziale)

Nell'anno seguente, la popolazione è ottenuta da quella dell'anno precedente con le modifiche seguenti:

- La natalità comporta un aumento di popolazione proporzionale a $y(n-1)$. Il coefficiente di proporzionalità è il tasso di natalità $b(n-1)$
- La mortalità comporta una riduzione di popolazione proporzionale a $y(n-1)$. Il coefficiente di proporzionalità è il tasso di mortalità $m(n-1)$
- La popolazione può aumentare se ci sono arrivi da un'altra popolazione: $x(n)$
- Infine, per semplicità, **non imponiamo il vincolo che i valori di x e y debbano essere interi**



Un sistema ecologico: modello

Dato quanto detto in precedenza, la popolazione all'anno n è descritta dalla seguente equazione:

$$y(n) = y(n-1) + b(n-1)y(n-1) - m(n-1)y(n-1) + x(n)$$

- Si noti che $b(\cdot)$ e $m(\cdot)$ sono segnali, ma agli effetti del sistema sono da considerare come parametri. Ugualmente considereremo le condizioni iniziali su y, per esempio i valori in $n < 0$ come parametri[1]
- Tali parametri sono considerati **noti**
- Allora si può considerare un sistema con $x(n)$ come ingresso e $y(n)$ come uscita.

$$x(n) \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow y(n) = [1 + b(n-1) - m(n-1)]y(n-1) + x(n)$$

[1] La scelta di $n = 0$ come momento in cui si «inizia» lo studio del sistema è arbitraria, ma semplifica la notazione. Per questo sistema, e sufficiente fissare il valore di $y(-1)$, mentre i valori precedenti non sono necessari. Come vedremo alla fine del corso, sistemi modellati da equazioni più complesse possono richiedere di fissare un numero maggiore di condizioni iniziali

Un sistema ecologico: Ex 1 e 2

$$y(n) = [1 + b(n-1) - m(n-1)]y(n-1) + x(n)$$

Il Sistema è definito dall'equazione precedente e dai parametri $y(0), b(\cdot), m(\cdot)$

Esercizio 1. Dire se tale sistema è istantaneo o dinamico, lineare, tempo invariante.

Esercizio 2. Si consideri ora il caso in cui $\forall n \in \mathbb{Z}, b(n) = B, m(n) = M$ e $y(n) = 0 \ \forall n < 0$. In altre parole,

$$y(n) = [1 + B - M]y(n-1) + x(n)$$

Notare che $M < 1$ (non possono morire più individui di quanti ne esistevano l'anno prima)

Tale sistema è LTI. Provate a stabilirne stabilità e causalità. Se troppo difficile, cominciare a calcolare la risposta impulsiva ed usarla per rispondere.

$$\boldsymbol{h}(\mathbf{0}) = [1 + B - M]y(-1) + \delta(0) = \delta(0) = 1$$
$$\boldsymbol{h}(\mathbf{1}) = [1 + B - M]\boldsymbol{h}(\mathbf{0}) + \delta(1) = \cdots$$
$$\boldsymbol{h}(\mathbf{2}) = [1 + B - M]\boldsymbol{h}(\mathbf{1}) + \delta(2) = \cdots$$

...

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Un sistema ecologico: ex 3

Esercizio 3. Creare una funzione che, dati i parametri di sistema y_init (=y(1)), M, B ed il segnale d'ingresso x, restituisca un vettore contenente l'uscita y cioè la numerosità della popolazione y (della stessa lunghezza di x).

Per semplicità, non imponiamo il vincolo che i valori di x e y debbano essere interi.

Osserviamo che in Matlab, il primo valore di un vettore è indicizzato da 1

Nota: salvare la funzione in un file con lo stesso nome della funzione e con estensione .m

```
function y = popolazione(y_init, M, B, x)
%y=popolazione(y_init, M, B, x)
%Calcola l'andamento del numero y d'individui. Gli ingressi sono:
%   - y_init: popolazione iniziale (all'instante 1)
%   - M: tasso mortalità
%   - B: tasso natalità
%   - x: vettore ingresso individui esterni

% preparo il vettore di uscita: stessa dimensione di x, ma valori nulli
y = zeros(size(x));
% Inizializzazione del primo valore di y
% NB In Matlab l'indicizzazione dei vettori comincia da 1
y(1)=y_init;
% ciclo di aggiornamento
for n = 2:numel(y)
    y(n) = 
end

```

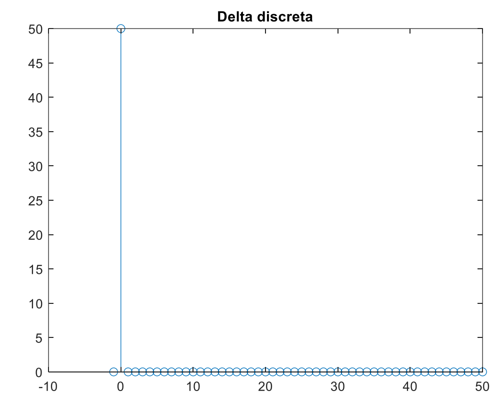
Un sistema ecologico: Ex 4

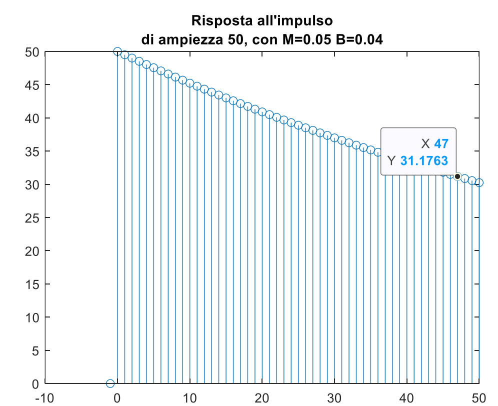
Usare tale funzione per valutare numericamente la risposta impulsiva. Cambiare i parametri e verificare la stabilità

Eseguite il codice mostrato

```
B = 0.04;  % Tasso di natalità
M = 0.05;  % Tasso di mortalità
ampiezza_impulso = 50; % Numero di arrivi nell'anno n=0
y_init = 0; % La popolazione è nulla prima dell'arrivo a n=0
anni = -1:50; % Consideriamo l'anno -1 con la condizione iniziale
delta = zeros(size(anni)); %
delta(2) = ampiezza_impulso; % l'anno 0 si trova in posizione 2
figure(1);
stem(anni,delta); % mostra la Delta discreta
title ('Delta discreta');

h = popolazione(y_init,M,B,delta);
figure(2);
stem(anni,h);
title(sprintf(['Risposta all''impulso\n' ...
    'di ampiezza %d, con M=%3.2f B=%3.2f'],...
   | ampiezza_impulso,M,B));
```



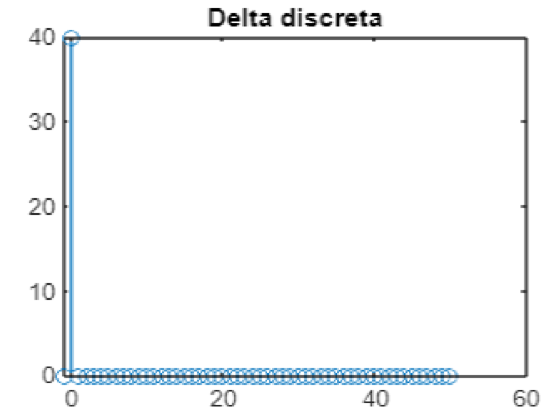


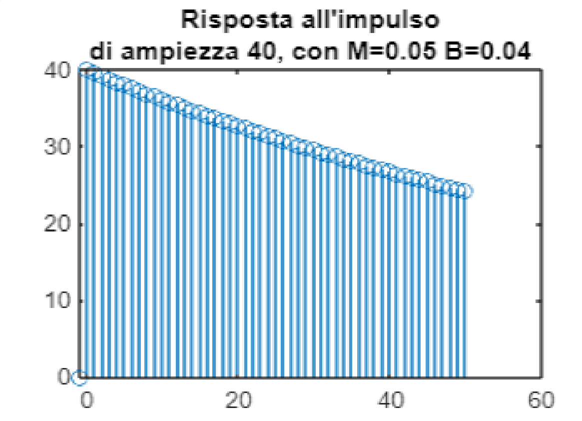
Un sistema ecologico: Ex 4

Dopo aver creato lo script, salvatelo come *live script* ed utilizzate degli slider per selezionare i valori dei 3 parametri. Ciò permette una visualizzazione più interattiva

```
% Tasso di natalità
B =  0.04 ;
% Tasso di mortalità
M =  0.05 ;
% Numero di arrivi nell'anno n=0
ampiezza_impulso =  40 ;
y_init = 0; % La popolazione è nulla prima dell'arrivo a n=0
anni = -1:50; % Consideriamo l'anno -1 con la condizione iniziale
delta = zeros(size(anni)); %
delta(2) = ampiezza_impulso; % l'anno 0 si trova in posizione 2
figure(1);
stem(anni,delta); % mostra la Delta discreta
title ('Delta discreta');

h = popolazione(y_init,M,B,delta);
figure(2);
stem(anni,h);
title(sprintf(['Risposta all''impulso\n' ...
    'di ampiezza %d, con M=%3.2f B=%3.2f'],...
    ampiezza_impulso,M,B));
```





Università degli Studi di Padova

Esercizio 5. Usare un LTI per ridurre il rumore

Per questo esercizio aprire il file `lti_denoising.mlx` e seguirne le indicazioni

Esempio di LTI a tempo discreto

Consideriamo un problema di riduzione del rumore (denoising). Supponiamo di voler utilizzare un segnale $x(n)$, ma di avere accesso soltanto ad una versione "rumorosa" di tale segnale. Matematicamente, questo fenomeno è modellato come un segnale di disturbo additivo, detto "rumore bianco".

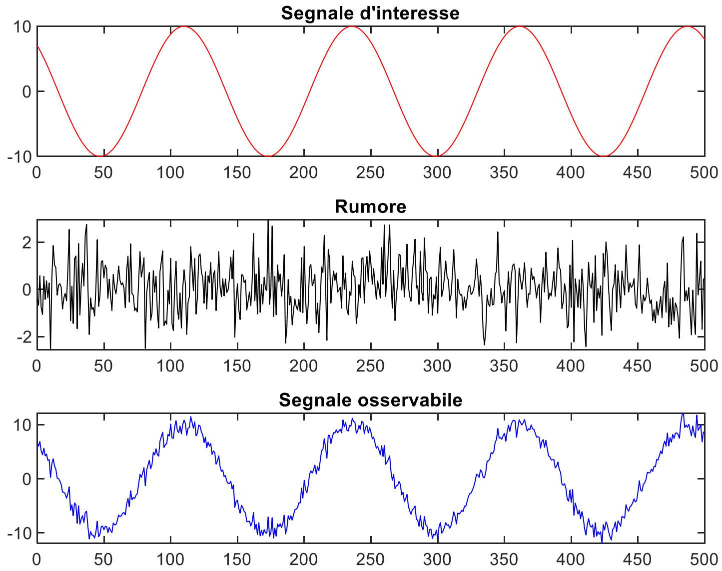
Possiamo quindi osservare $y(n) = x(n) + r(n)$ dove r è il rumore e y è il segnale osservabile.

Consideriamo un esempio in cui $x(n) = A\cos(\omega_0 n + \phi)$

In questo esempio considereremo un segnale a bassa frequenza: $\omega_0 \in \left(0, \frac{1}{10}\right)$

```
close all; clear variables;
min_n = 0; max_n= 500;
n = min_n:max_n;
Ax = 10;
omega0 =   0.05                 ;
phi = pi/4;
x = Ax*cos(omega0*n+phi);

Ar =    1                 ;
r = Ar*randn(size(x)); % Segnale di disturbo
```



Esercizio 5. Usare un LTI per ridurre il rumore

In questo esempio tentiamo di risolvere un *problema inverso*

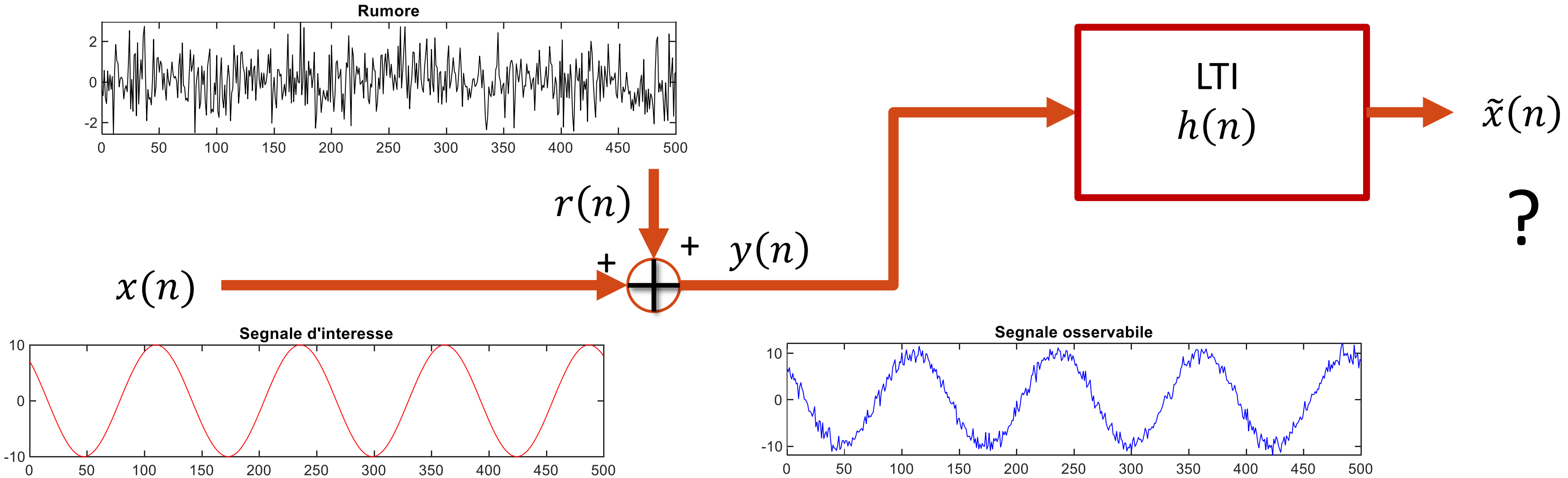
Conosciamo y e le caratteristiche del segnale utile e del disturbo, e vogliamo ricostruire il segnale utile

Si tratta quindi di *stimare* x nota una versione disturbata y

Si noti che il modello matematico del disturbo *non è* un LTI

Ciononostante, utilizziamo un LTI per creare la stima $\tilde{x}$ di x

Vogliamo studiare gli effetti della parametrizzazione dell'LTI sulla qualità della stima



Esercizio 5.1: Qualità del segnale

Come misura della qualità del segnale prendiamo la distanza ℓ^2 rispetto al segnale d'interesse x

Per prima cosa calcolate la distanza tra x e y

Decommentate e completate le righe 20 e 21

Suggerimento. Calcolate la differenza tra i due vettori; poi elevate al quadrato. Infine sommate tutti gli elementi con `sum` e calcolate la radice quadrata con `sqrt`

Cambiate i parametri del segnale e del rumore e verificate l'impatto sulla distanza

Questa misura di qualità è detta RMSE (Root Mean Square Error). Spesso si usa l'MSE (senza il calcolo della radice)

Esercizio 5.2: Risposta del sistema

Il sistema usato per il denoising è una media mobile su $2N+1$ campioni

Questo equivale ad un LTI con RI e RF rispettivamente uguali a:

$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{2N+1} & \text{se } |n| \le N \\ 0 & \text{se } |n| > N \end{cases}$$

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{2N+1} \cdot \frac{\sin\left[\frac{2N+1}{2}\omega\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

Usare lo script fornito per tracciare la RI e la RF.

Osservare il valore di $\hat{h}(\omega_0)$

Esercizio 5.3: stima di x

Il sistema LTI è implementato dal codice seguente:

```
z=zeros(size(y));
for m = N+1:(numel(x)-N)
     z(m) = 1/(2*N+1) * sum (y(m-N:m+N));
end
```

Giustificare i valori dei limiti del ciclo for

Questo ciclo implementa la convoluzione?

Completare la linea di codice 40: bisogna eliminare da z l'amplificazione o l'attenuazione del LTI

Esercizio 5.4: Parametrizzazione del sistema

Fissare un valore di ω_0 e determinare empiricamente il valore di N che massimizza la qualità della stima (cioè minimizza la distanza tra x e $\tilde{x}$)

Notare che per calcolare la distanza tra i due vettori x e $\tilde{x}$, bisogna escludere i primi $N + 1$ e gli ultimi N valori, per i quali non ci sono abbastanza campioni per calcolare la media

Trovare una spiegazione intuitiva del perché, al crescere di N, la distanza tra x e $\tilde{x}$ prima decresce e poi torna a crescere (e poi decresce di nuovo etc.)

NB. La linea 40 va completata con `xTilde = z/H(omega0);`

La scelta della media mobile è la migliore (tra tutti gli LTI) per effettuare il denoising?