

Analisi Matematica 2A

Nome, cognome, matricola:

Scritto del 10/9/2024

Esercizio 1 (10 punti) Dati $a, b \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = (x + a)e^{y^2 + bx}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ calcolare tutti i punti critici di f e discuterne la natura.

Risposte. Punti critici:	Natura:
--------------------------	---------

Esercizio 2 (12 punti) Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{x + y^2}{x - y^2} \\ y(0) = 1/4. \end{cases}$$

- Discutere l'esistenza e l'unicità di una soluzione locale.
- Studiare la monotonia e l'intervallo di esistenza della soluzione massimale.
- Calcolare il limite

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x).$$

- Disegnare un grafico qualitativo della soluzione (la convessità non è richiesta).

Risposte: iii) $L =$	iv) Grafico:
----------------------	--------------

Esercizio 3 (10 punti) Dato un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$F(x, y) = \left(x + \frac{\alpha}{1 + x^2 + y^2}, y + \frac{\alpha}{1 + x^2 + y^2} \right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- Provare che per $|\alpha| < 1/2$ F è un diffeomorfismo locale di classe C^∞ .
- Provare che per $|\alpha| < 1/2$ F è un diffeomorfismo globale.

2 ore e 30 minuti a disposizione

Esercizio Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{x+y^2}{x-y^2} \\ y(0) = 1/4, \end{cases}$$

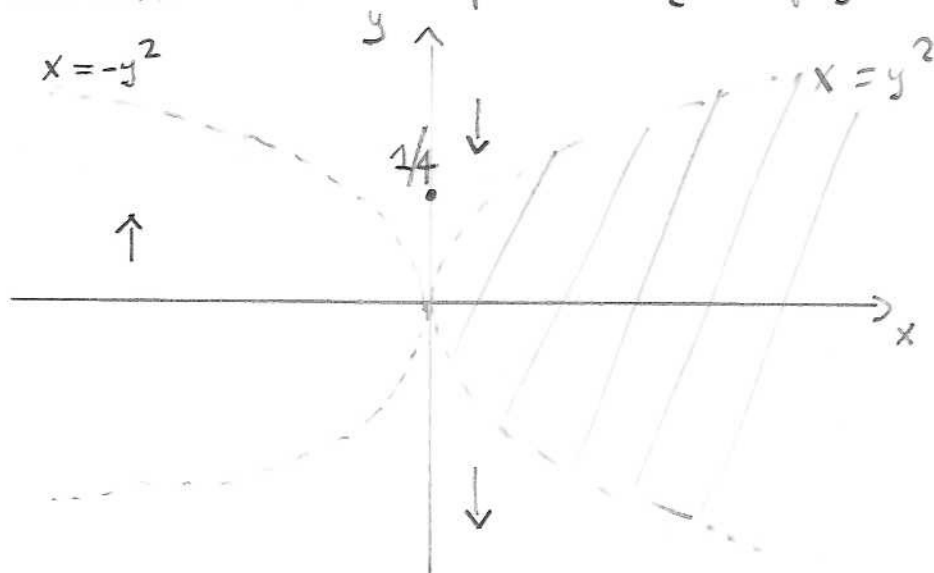
- i) Discutere l'esistenza e unicità locale della soluzione.
- ii) Studiare la monotonia e l'intervallo di esistenza della soluzione massima.
- iii) Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x)$.
- iv) Disegnare un grafico qualitativo della soluzione.

Risultazione. Siano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y^2 \neq 0\}$ ed $f = \frac{x+y^2}{x-y^2}$.

Allora $f \in C^\infty(A)$ e dunque è localmente di Lipschitz.

Segue da esistenza unica una soluzione locale $y \in C^\infty(-\delta, \delta)$

per qualche $\delta > 0$. Il grafico della soluzione è tutto contenuto nella regione $\{x < y^2\}$



Nella regione $-y^2 < x < y^2$ la soluzione decresce,

Nella regione $x < -y^2$ la soluzione cresce.

Deduciamo che per $x > 0$ la soluzione "va a sbattere" contro la parabola $x = y^2$;



Di conseguenza l'intervallo massimale è $[0, b)$ con $b \in (0, \infty)$. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow b^-} y(x) = \sqrt{b} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} y'(x) = -\infty.$$

In effetti: $0 < b < 1$.

Studiamo l'intervallo massimale sinistro. Abbiamo

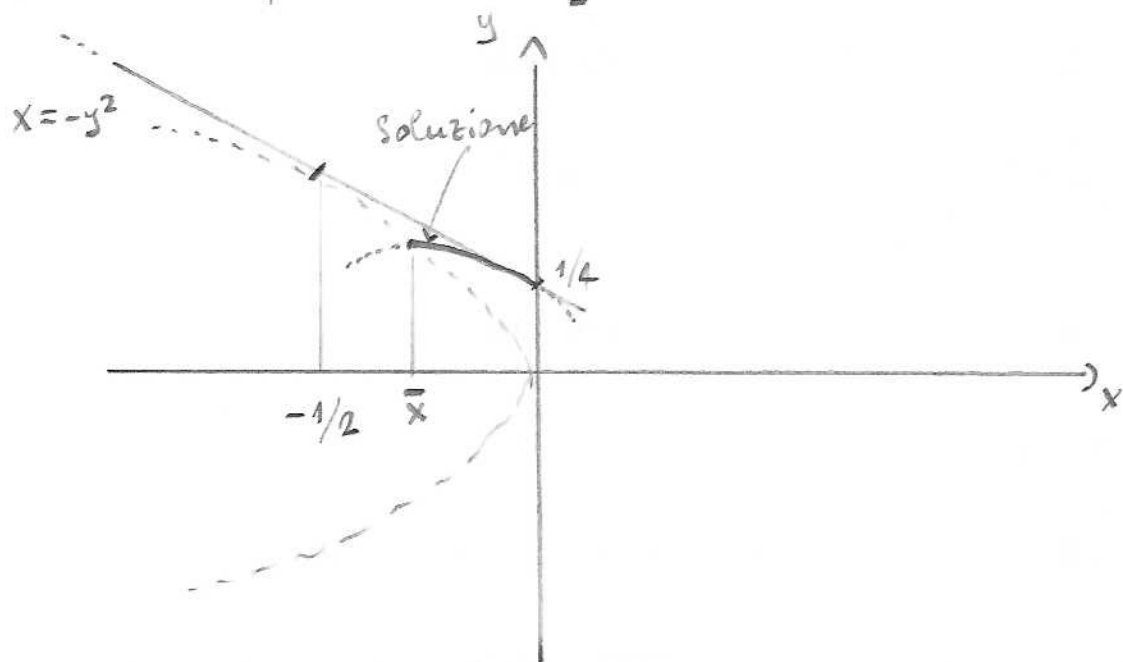
$$\begin{aligned} \frac{x+y^2}{x-y^2} &\geq -1 && (x < y^2) \\ &\Leftrightarrow x+y^2 \leq -x+y^2 \\ &\Leftrightarrow x \leq 0. \end{aligned}$$

Di conseguenza: $x \leq 0 \Rightarrow y'(x) \geq -1$. Si deduce

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} = y(0) &= y(x) + \int_x^0 y'(t) dt \geq y(x) + (-1) \cdot (0-x) \\ &\geq y(x) + x \end{aligned}$$

ovvero $y(x) \leq \frac{1}{4} - x$ per $x \leq 0$.

La retta $y = \frac{1}{4} - x$ e la parabola $x = -y^2$ si toccano nel punto $x = -\frac{1}{2}$;



Deduciamo che esiste $\bar{x} \in (-1/2, 0)$ tale che $\bar{x} = -y(\bar{x})^2$, ovvero la soluzione entra nella regione $\{x < -y^2\}$ dove diventa crescente. Da questa regione la soluzione non può più uscire.

Dunque la soluzione massimale è definita su $(-\infty, b)$ per qualche $b \in (0, 1)$.

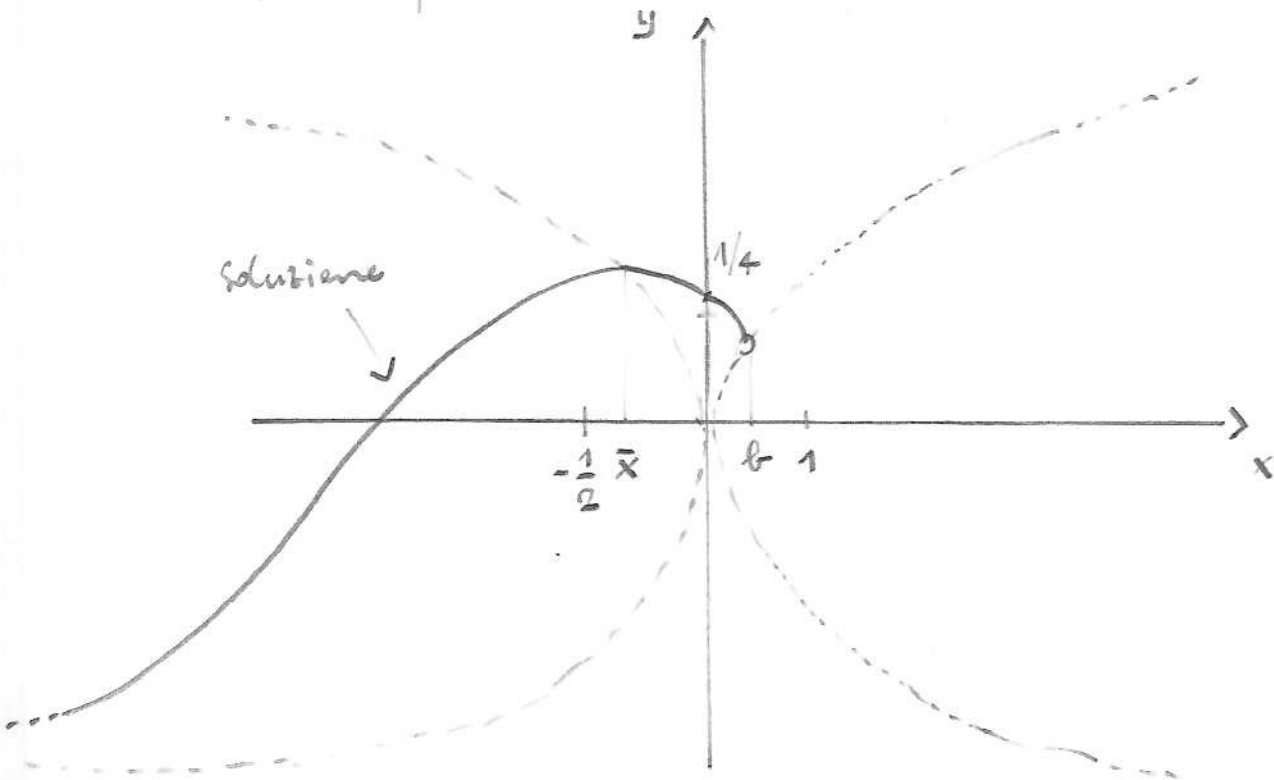
Il limite $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) \in [-\infty, y(\bar{x})]$ esiste per monotonia. Se fosse $L \in \mathbb{R}$ avremmo:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + y^2}{x - y^2} = +1.$$

Questo non è possibile,

quindi $L = -\infty$.

Gráfico qualitativo:



Esercizio Dato un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$F(x, y) = \left(x + \frac{\alpha}{1+x^2+y^2}, y + \frac{\alpha}{1+x^2+y^2} \right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

- i) Provare che per $|\alpha| < 1/2$ F è un omeomorfismo locale di classe C^∞
- ii) Provare che esiste $\delta > 0$ tale che per $|\alpha| < \delta$ $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è un omeomorfismo.

Risultazione. La matrice Jacobiana di F è

$$JF(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + \alpha \frac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2} & \alpha \frac{-2y}{(1+x^2+y^2)^2} \\ \alpha \frac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2} & 1 + \alpha \frac{-2y}{(1+x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

Dunque

$$\det JF(x, y) = 1 - 2\alpha \frac{x+y}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

Proviamo che

$$\frac{2|x|}{(1+x^2+y^2)^2} \leq \frac{2|x|}{(1+x^2)^2} \leq \frac{2|x|}{1+x^2} \leq 1$$

e analogamente $\frac{2|y|}{(1+x^2+y^2)^2} \leq 1$. Dunque

$$\det JF(x, y) > 1 - 2|\alpha| > 0 \quad \text{per } |\alpha| < 1/2.$$

