ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, a.a. 2023-2024

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

13 settembre 2024

TEMA 1

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{2x^2+1}.$$

(a) Determinare il dominio, il segno, eventuali simmetrie o periodicità;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale ed assoluto di f, calcolare i limiti di f' se significativi;

(e) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 (8 punti) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2} - 1 + \log(1+x^2)}{3x^2 + x^5 + \sin(x^3)}$$

Esercizio 3 (8 punti)

(a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int e^x \sin(e^x) dx.$$

(b) Calcolare se finito l'integrale generalizzato

$$\int_{-\infty}^{\log \pi} e^x \sin(e^x) dx.$$

Esercizio 4 (8 punti)

Studiare la convergenza della serie a termini positivi al variare di $\alpha > 0$

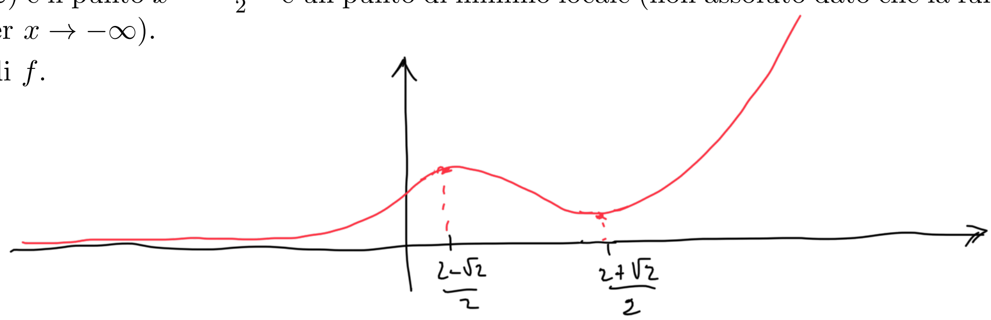
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \left(1 - \cos\frac{1}{n^2}\right).$$

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo, a parte il formulario.

SOLUZIONI

Soluzione esercizio 1 Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{e^x}{2x^2+1}.$$

(a) Il denominatore è sempre strettamente positivo (maggiore o uguale di 1), e la funzione e^x ha dominio $\mathbb{R}$. Dunque la funzione ha dominio tutto $\mathbb{R}$. Inoltre è sempre positiva, perché rapporto di due funzioni positive.
Dato che la funzione e^x non è simmetrica né periodica, la funzione non ammette simmetrie né periodicità.
(b) Gli unici limiti da calcolare sono a $\pm\infty$. Per rapporto tra infiniti (dato che l'infinito esponenziale è di ordine maggiore di un qualsiasi infinito polinomiale) otteniamo
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x^2+1} = +\infty.$$
Inoltre
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{2x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} e^x \frac{1}{2x^2+1} = 0.$$
La funzione ha asintoto orizzontale a $-\infty$ dato dalla retta $y = 0$.
La funzione non ha asintoto orizzontale a $+\infty$. Cerco un eventuale asintoto obliquo:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x(2x^2+1)} = +\infty$$
per rapporto tra infiniti. Dunque la funzione non ha asintoto obliquo a $+\infty$.
(c) La funzione è continua in tutto il suo dominio perché rapporto di funzioni continue, con denominatore mai nullo.
Calcoliamo la derivata:
$$f'(x) = \frac{e^x(2x^2+1) - e^x(4x)}{(2x^2+1)^2} = \frac{e^x(2x^2-4x+1)}{(2x^2+1)^2}.$$
La funzione è derivabile in tutto il suo dominio.
Osserviamo che $f'(x) \geq 0$ se e solo se $2x^2-4x+1 \geq 0$ (dato che $e^x > 0$, $(2x^2+1)^2 > 0$ per ogni x). Inoltre $2x^2-4x+1 \geq 0$ se e solo se $x \geq \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ oppure $x \leq \frac{2-\sqrt{2}}{2}$.
Dunque la funzione è crescente in $\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ e in $\left(-\infty, \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$ e decrescente in $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$.
Il punto $x = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ é un punto di massimo locale (non assoluto dato che la funzione tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$) e il punto $x = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ è un punto di minimo locale (non assoluto dato che la funzione tende a 0 per $x \to -\infty$).
(e) Grafico di f.



Soluzione esercizio 2 Calcolare il seguente limite:
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2} - 1 + \log(1+x^2)}{3x^2 + x^5 + \sin(x^3)}.$$

Utilizzando i polinomi di Taylor abbiamo che

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2) \qquad \log(1 + x^2) = x^2 + o(x^2) \qquad \sin(x^3) = x^3 + o(x^3).$$

Quindi il numeratore diventa

$$e^{x^2} - 1 + \log(1 + x^2) = 1 + x^2 + o(x^2) - 1 + x^2 + o(x^2) = 2x^2 + o(x^2) = x^2(2 + o(1))$$

e inoltre il denominatore diventa

$$3x^2 + x^5 + \sin(x^3) = 3x^2 + x^5 + x^3 + o(x^3) = x^2(3 + x^2 + x + o(x)) = x^2(3 + o(1)).$$

Sostituendo nel limite otteniamo:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2} - 1 + \log(1 + x^2)}{3x^2 + x^5 + \sin(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(2 + o(1))}{x^2(3 + o(1))} = \lim_{x\to 0} \frac{2 + o(1)}{3 + o(1)} = \frac{2}{3}.$$

Soluzione esercizio 3

(a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int e^x \sin(e^x) dx.$$

Calcoliamo l'integrale con il cambio di variabile $y = e^x$. Abbiamo che $dy = e^x dx$ e sostituendo otteniamo:

$$\int e^x \sin(e^x) dx = \int \sin(y) dy = -\cos y + c = -\cos(e^x) + c.$$

(b) Calcolare se finito l'integrale generalizzato

$$\int_{-\infty}^{\log \pi} e^x \sin(e^x) dx.$$

Utilizzando la primitiva ottenuta nel punto precedente e la definizione di integrale generalizzato calcoliamo

$$\lim_{M\to -\infty} \int_M^{\log \pi} e^x \sin(e^x) dx = \lim_{M\to -\infty} [-\cos(e^x)]_M^{\log \pi} = \lim_{M\to -\infty} -\cos(e^{\log \pi}) + \cos(e^M)$$
$$= -\cos \pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$

Soluzione esercizio 4

Studiare la convergenza della serie a termini positivi al variare di $\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \left(1 - \cos \frac{1}{n^2}\right).$$

La serie è una serie a termini positivi, e ne studiamo la convergenza utilizzando il criterio del confronto asintotico.

Utilizzando il polinomio di Taylor abbiamo che

$$\left(1 - \cos \frac{1}{n^2}\right) = 1 - 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)^2 = \frac{1}{n^4} \left(\frac{1}{2} + o(1)\right) \sim \frac{1}{n^4}.$$

Dunque il termine generale della serie è asintotico a

$$n^\alpha \left(1 - \cos \frac{1}{n^2}\right) \sim n^\alpha \frac{1}{n^4} = \frac{1}{n^{4-\alpha}}.$$

Per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata, abbiamo che la serie converge se $4 - \alpha > 1$, cioé se $\alpha < 3$ e la serie diverge se $4 - \alpha \leq 1$, cioé se $\alpha \geq 3$.