ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, a.a. 2023-2024

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

17 giugno 2024

TEMA 1

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = 2x\, e^{x+4}$$

(a) Determinare il dominio, segno, eventuali simmetrie o periodicità;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale ed assoluto di f;

(d) studiare la concavità e la convessità della funzione e gli eventuali flessi;

(e) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 (8 punti)
Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{\log(1+2x^3) + 3x^2}$$

Esercizio 3 (8 punti) Calcolare l'integrale

$$\int_1^2 x^3 \, \log x \, dx.$$

Sugg: procedere per parti.

Esercizio 4 (8 punti)
Determinare il carattere della serie a termini positivi al variare di $\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(n^\alpha + \log n \right) \arctan\left(\frac{2}{n^5} \right).$$

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende esclusi i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.

SOLUZIONI

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = 2x\, e^{x+4}$$

(a) Determinare il dominio, segno, eventuali simmetrie o periodicità;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale ed assoluto di f;

(d) studiare la concavità e la convessità della funzione e gli eventuali flessi;

(e) disegnare un grafico qualitativo di f.

Soluzione

(a) La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$, non è simmetrica dato che $f(-x) \neq \pm f(x)$ né periodica, dato che è composizione di funzioni non periodiche.

Infine, visto che $e^{x+4} > 0$ per ogni x, si ha che $f(x) > 0$ per $x > 0$, e $f(x) < 0$ per $x < 0$.

(b) Ricordiamo che $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, dunque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, mentre

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{x+4} = 0,$$

per confronto tra infiniti. La retta $y = 0$ è asintoto orizzontale a $-\infty$.

A $+\infty$ non ho asintoto orizzontale, cerco l'asintoto obliquo: se tale asintoto esiste la sua pendenza è data da $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{x+4}x = \lim_{x\to+\infty} e^{x+4} = +\infty.$$

La funzione non ha asintoto obliquo a $+\infty$.

(c) La funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$, perché composizione di funzioni continue, Calcoliamo la derivata, utilizzando la regola della derivata di un prodotto e di derivata di funzioni composte:

$$f'(x) = e^{x+4} + xe^{x+4} = (1 + x)e^{x+4}.$$

La funzione è derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

Inoltre $f'(x) > 0$ se e solo se $1 + x > 0$, cioè $x > -1$. Dunque f è strettamente crescente in $(-1, +\infty)$, e strettamente decrescente in $(-\infty, -1)$. Il punto $x = -1$ è un punto di minimo locale (o relativo). Inoltre dato che f è continua in tutto il dominio, e che ha limite 0 per $x \to -\infty$, e $+\infty$ per $x \to +\infty$, si ha che $x = -1$ è punto di minimo globale (o assoluto). Il minimo della funzione è $f(-1) = -e^3$. La funzione non ha massimo.

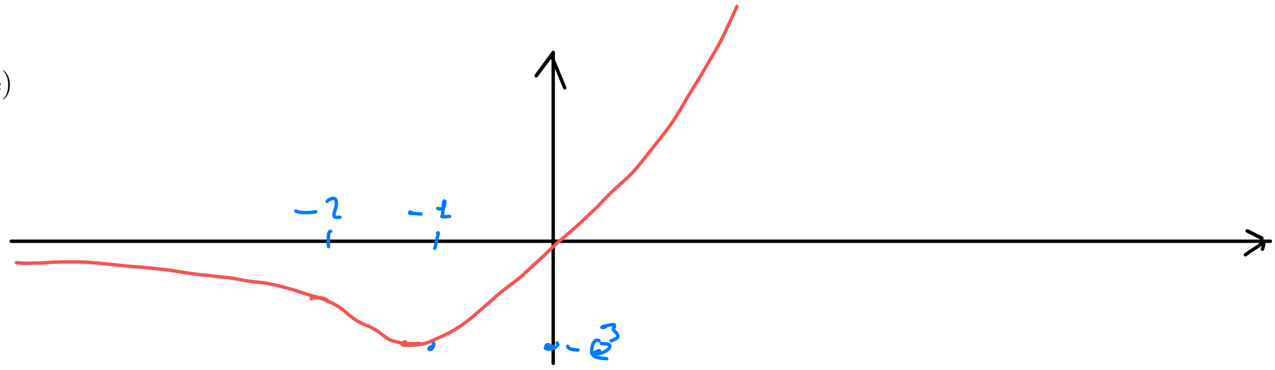
(d) Calcoliamo la derivata seconda, utilizzando la regola della derivata di un prodotto e di derivata di funzioni composte:

$$f''(x) = e^{x+4} + (1 + x)e^{x+4} = (2 + x)e^{x+4}.$$

La funzione è derivabile due volte su tutto $\mathbb{R}$, inoltre $f''(x) > 0$ se e solo se $x > -2$.

Dunque f è convessa in $(-2, +\infty)$ e concava in $(-\infty, 02)$. Il punto $x = -2$ è un punto di flesso.

(e)



Esercizio 2 (8 punti)
Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{\log(1+2x^3)+3x^2}$$

Soluzione Utilizziamo i polinomi di Taylor (o di McLaurin). Dato che

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

il numeratore diventa

$$\sin x - x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x = \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x^3\left(\frac{1}{6} + o(1)\right).$$

Inoltre ricordando che $\log(1+x) = x + o(x)$ otteniamo

$$\log(1+2x^3) = 2x^3 + o(2x^3) = 2x^3 + o(x^3)$$

e il denominatore diventa

$$\log(1+2x^3) + 3x^2 = 2x^3 + o(x^3) + 3x^2 = x^2(2x + o(x) + 3).$$

Sostituiamo nel limite e troviamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{\log(1+2x^3)+3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3\left(\frac{1}{6}+o(1)\right)}{x^2(2x+o(x)+3)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\frac{1}{6}+o(1)\right)}{(2x+o(x)+3)} = 0.$$

Esercizio 3 (8 punti) Calcolare l'integrale

$$\int_1^2 x^3 \log x \, dx.$$

Sugg: procedere per parti.

Soluzione Procediamo per parti:

$$\int_1^2 x^3 \log x\, dx = \left[\frac{x^4}{4}\log x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^4}{4}\frac{1}{x}dx = \left[\frac{x^4}{4}\log x\right]_1^2 - \frac{1}{4}\int_1^2 x^3 dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4}\log x\right]_1^2 - \frac{1}{4}\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \frac{2^4}{4}\log 2 - \frac{1}{4}\log 1 - \frac{1}{4}\frac{2^4}{4} + \frac{1}{4}\frac{1}{4} = 4\log 2 - 1 + \frac{1}{16} = 4\log 2 - \frac{15}{16}.$$

dove abbiamo utilizzato che $\log 1 = 0$ e $2^4 = 16$.

Esercizio 4 (8 punti)
Determinare il carattere della serie a termini positivi al variare di $\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(n^\alpha + \log n \right) \arctan\left(\frac{2}{n^5}\right).$$

Soluzione Utilizziamo il criterio del confronto asintotico. Per confronto tra infiniti, per ogni $\alpha > 0$ si ha che $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n^\alpha} = 0$ dunque

$$n^\alpha + \log n = n^\alpha \left(1 + \frac{\log n}{n^\alpha}\right) \sim n^\alpha.$$

Inoltre dato che $\arctan x = x + o(x)$ per $x \to 0$ e che $\frac{2}{n^5} \to 0$ si ha che

$$\arctan\left(\frac{2}{n^5}\right) = \frac{2}{n^5} + o\left(\frac{2}{n^5}\right) = \frac{1}{n^5}(2 + o(1)) \sim \frac{1}{n^5}.$$

Sostituendo otteniamo che

$$\left(n^\alpha + \log n \right) \arctan\left(\frac{2}{n^5}\right) \sim n^\alpha \frac{1}{n^5} = \frac{1}{n^{5-\alpha}}.$$

Dato che la serie armonica generalizzata converge per $5 - \alpha > 1$ (cioè $\alpha < 4$) e diverge per $5 - \alpha \le 1$ (cioè $\alpha \ge 4$), per il criterio del confronto asintotico la stessa cosa è vera per la serie di partenza, che quindi converge per $\alpha < 4$ e diverge per $\alpha \ge 4$.