ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, a.a. 2023-2024

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

19 febbraio 2024

TEMA 1

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x-5}\right)$$

(a) Determinare il dominio, segno, eventuali simmetrie o periodicità;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 (8 punti)
Si consideri per $\alpha \in \mathbb{R}$ la successione

$$a_n = n^\alpha \left(1 - \cos\frac{1}{n^2}\right).$$

1) Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_n a_n$.
2) Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Esercizio 3 (8 punti) 1) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \left(\frac{1}{(\log x)^2 - 9}\right)\frac{1}{x}\,dx$$

Facoltativo Dire se converge e in caso affermativo calcolare l'integrale generalizzato $\int_{e^4}^{+\infty}\left(\frac{1}{(\log x)^2-9}\right)\frac{1}{x}\,dx$.

Esercizio 4(8 punti)
Sia

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + xy + \log y.$$

Determinare il dominio di f, calcolare i punti critici e studiarne la natura.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende esclusi i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.

SOLUZIONI

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x-5}\right)$$

(a) Determinare il dominio, segno, eventuali simmetrie o periodicità;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Soluzione

(a) La funzione ha dominio $\mathbb{R} \setminus \{5\}$, dato che arctan è definita per ogni valore del suo argomento e l'argomento è definito per ogni $x \neq 5$. Dato che il dominio non è simmetrico né periodico, la funzione non può avere né simmetrie né periodicità. Inoltre f è positiva per $x > 5$ e negativa per $x < 5$ e non ha zeri.

(b) Calcolo i limiti significativi:

$$\lim_{x \to 5^+} \arctan\left(\frac{1}{x-5}\right) = \frac{\pi}{2}$$

perché $\frac{1}{x-5} \to +\infty$.

$$\lim_{x \to 5^-} \arctan\left(\frac{1}{x-5}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

perché $\frac{1}{x-5} \to -\infty$. Dunque $x = 5$ è una singolarità di salto.

Calcolo i limiti a $+\infty$ e a $-\infty$: dato che in entrambi i casi $\frac{1}{x-5} \to 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} \arctan\left(\frac{1}{x-5}\right) = \arctan(0) = 0 = \lim_{x \to -\infty} \arctan\left(\frac{1}{x-5}\right).$$

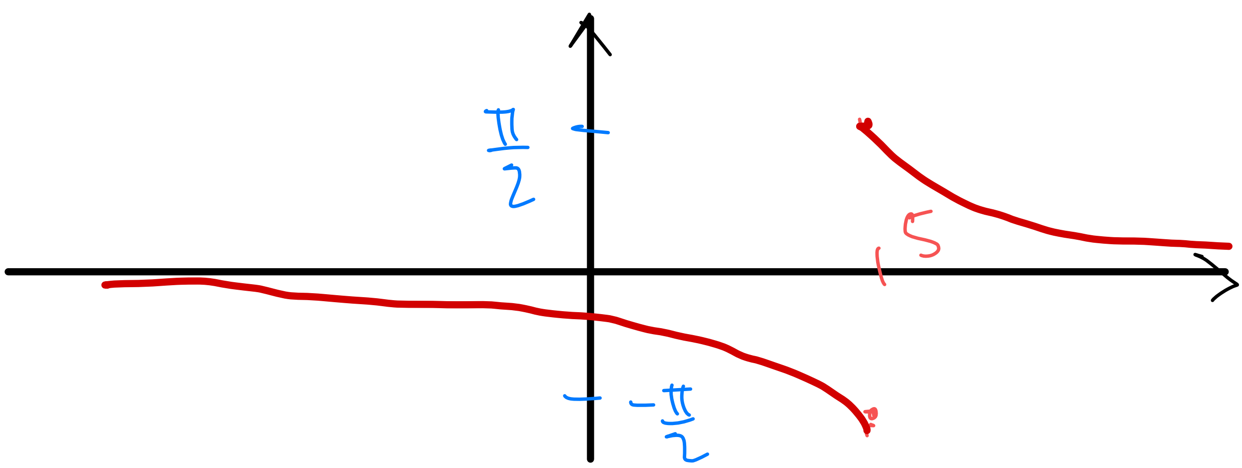
Quindi la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale a $\pm\infty$. (c) La funzione è continua e derivabile nel suo dominio. Calcolo la derivata di f:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (\frac{1}{x-5})^2} \frac{-1}{(x-5)^2} = \frac{-1}{(x-5)^2 + 1}$$

Non ci sono punti critici per f cioè soluzioni di $f'(x) = 0$. Inoltre $f'(x) < 0$ nel dominio quindi la funzione è strettamente decrescente in $(-\infty, 5)$ e in $(5, \infty)$.

Infine $\lim_{x \to 5} f'(x) = -1$.

(d)



Facoltativo: calcoliamo la derivata seconda:

$$f'(x) = \frac{2(x-5)}{\Big((x-5)^2+1\Big)^2}$$

quindi la funzione è concava per $x < 5$ e convessa per $x > 5$.

Esercizio 2 (8 punti)
Si consideri per $\alpha \in \mathbb{R}$ la successione

$$a_n = n^\alpha \left(1 - \cos\frac{1}{n^2}\right).$$

1) Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_n a_n$.
2) Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.
Soluzione 1) Poiché $1/n \to 0$, possiamo utilizzare i polinomi di Taylor e riscrivere $\cos\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{2n^4} + o(\frac{1}{n^4})$. Sostituendo in a_n otteniamo

$$\lim_n n^\alpha \left(1 - \cos\frac{1}{n^2}\right) = \lim_n n^\alpha \left(\frac{1}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) = \lim_n \frac{1}{2n^{4-\alpha}}$$

Quindi $\lim_n a_n = 0$ se $\alpha < 4$, $\lim_n a_n = +\infty$ se $\alpha > 4$, $\lim_n a_n = 1/2$ se $\alpha = 4$.
2) La serie è a termini positivi. Dal punto 1) sappiamo che $a_n \sim \frac{1}{n^{4-\alpha}}$ quindi dal criterio del confronto asintotico $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{4-\alpha}}$ converge cioè se e solo se $4 - \alpha > 1$ cioè $\alpha < 3$.
Esercizio 3 (8 punti) 1) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \left(\frac{1}{(\log x)^2 - 9}\right)\frac{1}{x}\,dx$$

Facoltativo Dire se converge e in caso affermativo calcolare l'integrale generalizzato $\int_{e^4}^{+\infty} \left(\frac{1}{(\log x)^2-9}\right)\frac{1}{x}\,dx$.

Soluzione Poiché la funzione da integrare contiene $\log x$ e a moltiplicare c'è il termine $1/x$, possiamo usare la sostituzione $\log x = y$. In questo caso $\frac{1}{x}dx = dy$ e dal metodo di sostituzione si ha

$$\int \left(\frac{1}{(\log x)^2 - 9}\right)\frac{1}{x}\,dx = \int \frac{1}{y^2-9}\,dy.$$

Notiamo che $y^2 - 9 = (y-3)(y+3)$ quindi risolviamo $\int \frac{1}{y^2-9}$ con il metodo dei fratti semplici. Cerco A e B tali che

$$\frac{1}{y^2-9} = \frac{A}{y-3} + \frac{B}{y+3} = \frac{(A+B)y + 3(A-B)}{(y-3)(y+3)}$$

Quindi A e B devono risolvere il sistema $A + B = 0$ e $3(A - B) = 1$. Dalla prima otteniamo $B = -A$ e inserendo nella seconda si ha $A = 1/6$ e quindi $B = -1/6$. Quindi

$$\int \frac{1}{y^2-9}\,dy = \frac{1}{6}\int \frac{1}{y-3}\,dy - \frac{1}{6}\int \frac{1}{y+3}\,dy = \frac{1}{6}\log|y-3| - \frac{1}{6}\log|y+3| + c = \frac{1}{6}\log\left(\frac{|y-3|}{|y+3|}\right) + c$$

e quindi nella variabile x si ottiene

$$\int \left(\frac{1}{(\log x)^2 - 9}\right)\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{6}\log|\log x - 3| - \frac{1}{6}\log|\log x + 3| + c = \frac{1}{6}\log\left(\frac{|\log x - 3|}{|\log x + 3|}\right) + c.$$

Facoltativo: Calcoliamolo attraverso la primitiva trovata sopra

$$\int_{e^4}^{+\infty} \left(\frac{1}{(\log x)^2 - 9}\right)\frac{1}{x}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\int_{e^4}^{M} \left(\frac{1}{(\log x)^2 - 9}\right)\frac{1}{x}\,dx =$$

$$\lim_{M\to+\infty}\frac{1}{6}\log\left(\frac{|\log M - 3|}{|\log M + 3|}\right) - \frac{1}{6}\log\left(\frac{|4-3|}{|4+3|}\right) = -\frac{1}{6}\log\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{6}\log(7),$$

dove si è tenuto conto che $\lim_{M\to+\infty}\frac{|\log M - 3|}{|\log M + 3|} = 1$.

Esercizio 4(8 punti)
Sia

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + xy + \log y.$$

Determinare il dominio di f, calcolare i punti critici e studiarne la natura.

Soluzione La funzione è definita in $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ e in D è derivabile. Calcoliamo le derivate in ogni punto di D:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^2 + y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + \frac{1}{y}.$$

Troviamo i punti critici risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y = 0 \\ x + \frac{1}{y} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -x^2 \\ x - \frac{1}{x^2} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -x^2 \\ \frac{x^3-1}{x^2} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

L'unico candidato punto critico è $(1,-1)$ ma questo punto non appartiene al dominio. La funzione dunque non ha punti critici.