ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, a.a. 2023-2024

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

5 febbraio 2024

TEMA 1

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{x}{x-4}\right)$$

(a) Determinare il dominio, segno, eventuali simmetrie o periodicità;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Facoltativo: calcolare la derivata seconda di f e determinare gli intervalli di concavità e convessità di f.

Esercizio 2 (8 punti) (1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x)-x}{e^{\sqrt{x}}-1-\sqrt{x}}.$$

(2) Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha > 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x)-x^\alpha}{e^{\sqrt{x}}-1-\sqrt{x}}.$$

Esercizio 3 (8 punti) Calcolare

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 x + 5} \sin x dx$$

Esercizio 4 (8 punti)
Studiare la convergenza della serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right).$$

Facoltativo: Studiare al variare di $\alpha > 0$ il carattere della serie a termini positivi $\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)$.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende esclusi i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.

ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, a.a. 2023-2024

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

SOLUZIONI

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{x}{x-4}\right)$$

(a) Determinare il dominio, segno, eventuali simmetrie o periodicità;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Facoltativo: calcolare la derivata seconda di f e determinare gli intervalli di concavità e convessità di f.

Soluzione (a) Dato che il logaritmo è ben definito solo se l'argomento è positivo il dominio si ottiene ponendo $\frac{x}{x-4} > 0$. Le soluzioni della disequazione (fatta studiando il prodotto dei segni di numeratore e denominatore) sono $x > 4$ oppure $x < 0$.
Dunque $D = (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$.
Dato che il dominio non è simmetrico rispetto a 0 né periodico, la funzione non presenta né simmetrie né periodicità.
Infine $\log\left(\frac{x}{x-4}\right) \geq 0 = \log 1$ se e solo se $\frac{x}{x-4} \geq 1$. Risolviamo la disequazione:

$$\frac{x}{x-4} \geq 1 \qquad \text{se e solo se } \frac{x}{x-4} - 1 \geq 0 \qquad \text{se e solo se } \frac{x-x+4}{x-4} \geq 0 \qquad \text{se e solo se } x > 4.$$

Dunque la funzione è positiva in $(4, +\infty)$ e negativa in $(-\infty, 0)$.

(b) Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio. Dato che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\left(1-\frac{4}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-\frac{4}{x}} = 1$$

e analogamente $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x-4} = 1$, si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{x}{x-4}\right) = \log 1 = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \log\left(\frac{x}{x-4}\right) = \log 1 = 0.$$

Dunque la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale sia a $+\infty$ che a $-\infty$.
Inoltre

$$\lim_{x\to0^-} \frac{x}{x-4} = 0^+ \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to4^+} \frac{x}{x-4} = +\infty$$

quindi

$$\lim_{x\to0^-} \log\left(\frac{x}{x-4}\right) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to4^+} \log\left(\frac{x}{x-4}\right) = +\infty.$$

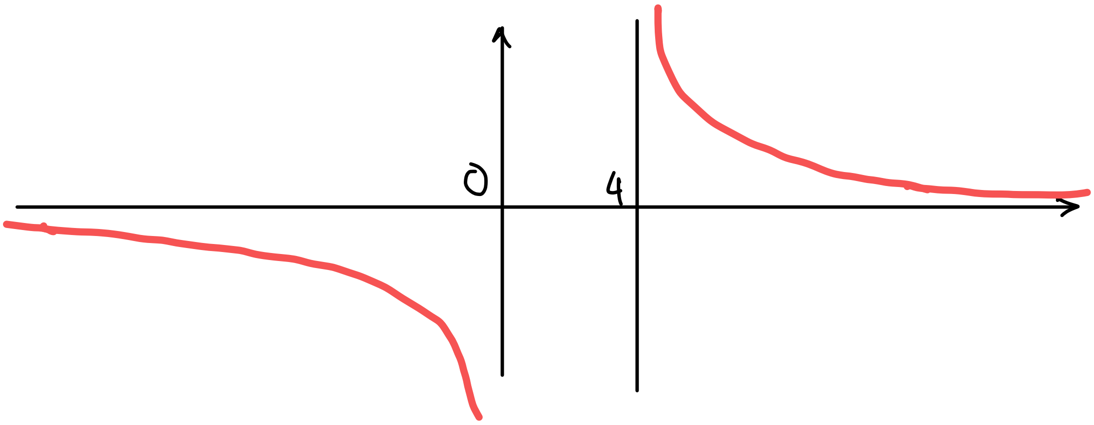
In particolare la retta $x = 0$ è asintoto verticale sinistro e la retta $x = 4$ è asintoto verticale destro.

(c) La funzione è composizioni di funzioni continue e dunque è continua nel suo dominio. Calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x}{x-4}} \frac{1(x-4) - x1}{(x-4)^2} = \frac{x-4}{x} \frac{-4}{(x-4)^2} = \frac{-4}{x(x-4)}.$$

Quindi la funzione è derivabile in tutto il suo dominio. Dato che $x(x-4) > 0$ per ogni $x \in D$, si ha che $f'(x) < 0$ per ogni $x \in D$. In particolare questo implica che f è strettamente decrescente nell'intervallo $(-\infty, 0)$ e strettamente decrescente nell'intervallo $(4, +\infty)$. La funzione non ha punti di massimo o minimo locale o globale.

(d)



Facoltativo: calcolare la derivata seconda di f e determinare gli intervalli di concavità e convessità di f. Calcoliamo la derivata seconda

$$f''(x) = \left(\frac{-4}{x(x-4)}\right)' = \frac{0 - (-4)[1(x-4) + x1]}{x^2(x-4)^2} = \frac{4(2x-4)}{x^2(x-4)^2} = \frac{8(x-2)}{x^2(x-4)^2}.$$

Dunque la funzione è derivabile due volte in tutto il suo dominio.
Dato che $f''(x) > 0$ per $x \in D$ tale che $x > 2$, si ha che f è convessa nell'intervallo $(4, +\infty)$ e concava nell'intervallo $(-\infty, 0)$.

Esercizio 2 (8 punti)

(1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(1+x) - x}{e^{\sqrt{x}} - 1 - \sqrt{x}}.$$

(2) Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha > 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(1+x) - x^\alpha}{e^{\sqrt{x}} - 1 - \sqrt{x}}.$$

Soluzione

(1) Ricordando il polinomio di Taylor di grado 2 per $\log(1+x)$, con $x \to 0$, si ha

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

e quindi il numeratore diventa

$$\log(1+x) - x = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - x = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2) = x^2 \left(-\frac{1}{2} + o(1)\right).$$

Ora consideriamo il polinomio di Taylor di grado 2 per e^x con $x \to 0$, $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$, e lo calcoliamo in $\sqrt{x}$: otteniamo così

$$e^{\sqrt{x}} = 1 + \sqrt{x} + \frac{1}{2}x + o(x).$$

Dunque il denominatore diventa per $x \to 0^+$,

$$e^{\sqrt{x}} - 1 - \sqrt{x} = 1 + \sqrt{x} + \frac{1}{2}x + o(x) - 1 - \sqrt{x} = \frac{1}{2}x + o(x) = x\left(\frac{1}{2} + o(1)\right).$$

Calcoliamo ora il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x) - x}{e^{\sqrt{x}} - 1 - \sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\left(-\frac{1}{2} + o(1)\right)}{x\left(\frac{1}{2} + o(1)\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\left(-\frac{1}{2} + o(1)\right)}{\left(\frac{1}{2} + o(1)\right)} = 0.$$

(2) Il denominatore rimane lo stesso del punto 1, mentre il numeratore diventa

$$\log(1+x) - x = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - x^\alpha = \begin{cases} x\left(1 - \frac{1}{2}x + o(x) - x^{\alpha-1}\right) = x(1 + o(1)) & \text{se } \alpha > 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2) = x^2\left(-\frac{1}{2} + o(1)\right) & \text{se } \alpha = 1 \\ x^\alpha\left(x^{1-\alpha} - \frac{1}{2}x^{2-\alpha} + o(x^{2-\alpha}) - 1\right) = x^\alpha(-1 + o(1)) & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}.$$

Dunque se $\alpha > 1$ il limite è

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x) - x^\alpha}{e^{\sqrt{x}} - 1 - \sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x(1 + o(1))}{x\left(\frac{1}{2} + o(1)\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 + o(1)}{\frac{1}{2} + o(1)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Se $\alpha = 1$ il limite è 0 come nel punto 1.

Se $\alpha < 1$ allora il limite è

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x) - x^\alpha}{e^{\sqrt{x}} - 1 - \sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha(-1 + o(1))}{x\left(\frac{1}{2} + o(1)\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1 + o(1)}{x^{1-\alpha}\left(\frac{1}{2} + o(1)\right)} = -\infty.$$

Esercizio 3 (8 punti) Calcolare

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 x + 5} \sin x dx,$$

Soluzione Facciamo il cambio di variabile $y = \cos x$. In questo caso abbiamo che $dy = -\sin x dx$. Cambiamo anche gli estremi di integrazione nell'integrale (ricordando che $\cos 0 = 1$, $\cos \pi/2 = 0$) e otteniamo

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 x + 5} \sin x dx = \int_1^0 \frac{1}{y^2 + 5}(-1)dy = -\int_1^0 \frac{1}{y^2 + 5}dy = \int_0^1 \frac{1}{y^2 + 5}dy.$$

Calcoliamo le primitive di $\frac{1}{y^2+5}$. Dato che il polinomio a denominatore ha determinante negativo, si ha che

$$\int \frac{1}{y^2 + 5}dy = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{y}{\sqrt{5}} + c.$$

Dunque per il corollario del teorema fondamentale del calcolo integrale otteniamo che

$$\int_0^1 \frac{1}{y^2 + 5}dy = \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{y}{\sqrt{5}}\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Esercizio 4 (8 punti)
Studiare la convergenza della serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right).$$

Facoltativo: Studiare al variare di $\alpha > 0$ il carattere della serie a termini positivi $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha}\left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)$.

Soluzione Utilizziamo il polinomio di Taylor di grado 3 di $\sin x$ per $x \to 0$, nella variabile $\frac{1}{n}$ e otteniamo per $n \to= \infty$,

$$n\left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right) = n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{6}\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = n\frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{6} + o(1)\right) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{6} + o(1)\right) \sim \frac{1}{n^2}.$$

Dunque la serie data è asintotica alla serie armonica generalizzata di termine $\frac{1}{n^2}$, che è convergente. Per il criterio del confronto asintotico anche la serie data è convergente.

Facoltativo: Procedendo come sopra abbiamo che per $n \to +\infty$,

$$n^{\alpha}\left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right) = n^{\alpha}\frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{6} + o(1)\right) = \frac{1}{n^{3-\alpha}}\left(\frac{1}{6} + o(1)\right) \sim \frac{1}{n^{3-\alpha}}.$$

Dunque la serie data è asintotica alla serie armonica generalizzata di termine $\frac{1}{n^{3-\alpha}}$, che è convergente se e solo se $3 - \alpha > 1$, cioè se e solo se $\alpha < 2$. Per il criterio del confronto asintotico anche la serie data è convergente se $\alpha < 2$, mentre è divergente se $\alpha \geq 2$.