ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2015-2016

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

17 febbraio 2016

TEMA 1

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = (x^2 - 3)e^{-|x|}$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) Calcolare la derivata seconda di f e determinare gli intervalli di concavità e convessità con eventuali punti di flesso.

(e) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento

(a)

- Determinare il dominio: $\mathbb{R}$.
- Eventuali simmetrie: la funzione è pari.
- Periodicità: la funzione non è periodica.
- Segno di f: essendo $(x^2-3) \geq 0$ se e solo se $|x| \geq \sqrt{3}$ e $e^{-|x|} \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, deduciamo che $f(x) \geq 0$ se e solo se $|x| \geq \sqrt{3}$, ovvero $x \in (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$, e che $f(x) = 0$ se e solo se $|x| = \sqrt{3}$, cioè $x = \pm\sqrt{3}$.

(b-c) La funzione f è sempre continua, poichè lo sono $(x^2 - 3)$ e $e^{-|x|}$. Inoltre è derivabile per ogni $x \neq 0$, dato che ivi lo sono $(x^2 - 3)$ e $e^{-|x|}$. La derivabilità in 0 deve essere studiata separatamente. Notiamo che per $x > 0$, $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$ e per $x < 0$, $f(x) = (x^2 - 3)e^{x}$ dunque

$$f'(x) = (2x - x^2 + 3)e^{-x}, \text{ per } x > 0, \qquad f'(x) = (2x + x^2 - 3)e^{x}, \text{ per } x < 0.$$

Possiamo calcolare il limite destro e sinistro della derivata in 0 e otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} (2x - x^2 + 3)e^{-x} = 3 \qquad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} (2x + x^2 - 3)e^{x} = -3.$$

Da questo deduciamo che f non è derivabile in 0, e che 0 è un punto angoloso.

Calcoliamo ora

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^2 - 3)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 3}{e^x} = 0$$

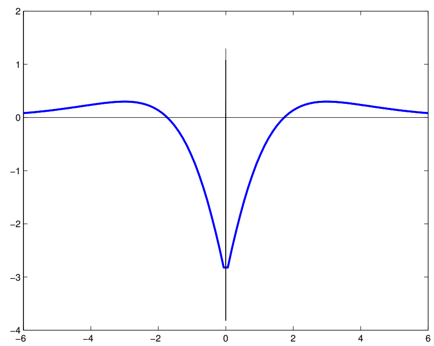

Figura 1: Grafico di f in $(-6, 6)$.

come si vede dal confronto tra infiniti (o utilizzando la regola De l'Hopital). Inoltre, dato che f è pari, anche $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Quindi la funzione ha asintoto orizzontale $y = 0$ sia a $+\infty$ che a $-\infty$.

Per lo studio dei massimi e minimi, visto che la funzione è pari, ci limitiamo a studiare quelli in $[0, +\infty)$ deducendo gli altri per simmetria. In $[0, +\infty)$ si ha $f(x) = (x^2-3)e^{-|x|} = (x^2-3)e^{-x}$ e quindi

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-x} - (x^2-3)e^{-x} = e^{-x}(-x^2+2x+3).$$

Osserviamo che $-x^2 + 2x + 3 \geq 0$ in $(0, +\infty)$ se e solo se $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ ovvero per $x \in (0, 3]$. Da questo deduciamo che la funzione è crescente in $(0, 3]$ e decrescente in $[3, +\infty)$ (e quindi per simmetria decrescente in $(-3, 0]$ e crescente in $(-\infty, -3)$). Questo implica che ± 3 sono punti di massimo relativo e che 0 è punto di minimo relativo. Notiamo che, dato che la funzione ha asintoto orizzontale la retta $y = 0$, $x = \pm 3$ sono anche massimi assoluti, con valore $f(\pm 3) = 6 \cdot e^{-3} \approx 0.29$, e $x = 0$ è il punto di minimo assoluto, con valore minimo $f(0) = -3$.

(d) Come in precedenza calcoliamo esclusivamente la derivata seconda solo per $x > 0$ (in $x = 0$ non esiste la derivata prima e quindi neppure la seconda!) e osserviamo che essendo $f'(-x) = -f'(x)$ necessariamente $f''(-x) = f''(x)$. Da

$$f'(x) = e^{-x}(-x^2+2x+3).$$

abbiamo

$$f''(x) = -e^{-x}(-x^2+2x+3) + e^{-x}(-2x+2) = e^{-x}(x^2-4x-1).$$

Poichè, facilmente, $x^2 - 4x - 1 \geq 0$ in $(0, +\infty)$ se e solo se $x \in (2+\sqrt{5}, +\infty)$, la funzione è concava in $(0, 2+\sqrt{5}]$ e convessa in $[2+\sqrt{5}, +\infty)$ con un flesso in $x = 2+\sqrt{5} \approx 4.23$. Per simmetria, la funzione è concava in $[-(2+\sqrt{5}), 0)$ e convessa in $(-\infty, -(2+\sqrt{5}))$ con un flesso in $x = -(2+\sqrt{5}) \approx -4.23$.

(e) Per il grafico si veda la figura.

Esercizio 2 (8 punti)
Calcolare il valore del limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x}{e^x - \sin x - \cos x}.$$

Svolgimento.

Ricordato che
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$
a numeratore risulta
$$\sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) \sim -\frac{1}{8}x^2.$$
A denominatore, ricordando che
$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$
$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$
ricaviamo che
$$e^x - \sin x - \cos x = \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) - \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) \sim x^2.$$
Quindi
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x}{e^x - \sin x - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{8}x^2}{x^2} = -\frac{1}{8}.$$

Esercizio 3 (8 punti)
i) Calcolare
$$\int \sin\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^3}dx.$$
(sugg: operare il cambio di variabile $t = \frac{1}{x}$)

ii) Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale converge:
$$\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^\alpha}dx.$$
Calcolare il valore dell'integrale per $\alpha = 3$ usando il punto precedente.

Svolgimento.

(i) Utilizzando il cambio di variabile $t = 1/x$ ricaviamo, essendo $dt = (-1/x^2)dx$, integrando per parti,
$$\begin{aligned}\int \sin\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^3}dx &= -\int t\,\sin(t)dt = -\left(-t\cdot\cos(t) - \int\left(-\cos(t)\right)dt\right)\\ &= t\cdot\cos(t) - \sin(t) + C = \frac{1}{x}\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{x}\right) + C.\end{aligned}$$

(ii) Visto che $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$, deduciamo che $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}$. Di conseguenza
$$\sin\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^\alpha} \sim \left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^\alpha}dx = \frac{1}{x^{\alpha+1}}$$

e per il confronto asintotico, abbiamo che l'integrale richiesto converge se converge

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha+1}} dx$$

cioè per $\alpha + 1 > 1$, ovvero $\alpha > 0$.

Riguardo il calcolare il valore dell'integrale per $\alpha = 3$, visto che $\lim_{M\to+\infty} \cos(M)\frac{1}{M} = 0$ (limitata per infinitesima!), dal teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\begin{aligned}
\lim_{M\to+\infty} \int_1^M \sin\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^3} dx &= \lim_{M\to+\infty} \left(\frac{1}{M}\cdot\cos\left(\frac{1}{M}\right) - \sin\left(\frac{1}{M}\right) - (\cos(1) - \sin(1))\right) \\
&= -\cos(1) + \sin(1).
\end{aligned}$$

Esercizio 4 (8 punti)
Data la funzione $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 4)e^{x+y}$, verificare che $(1, 1)$ è un punto critico. Scrivere l'equazione del piano tangente al suo grafico in tale punto. Determinare la matrice Hessiana della funzione nel punto $(1, 1)$ e dedurne, se possibile, la natura del punto.

Svolgimento

Poichè

$$\nabla f(x, y) = ((2x + x^2 + y^2 - 4)e^{x+y}, (2y + x^2 + y^2 - 4)e^{x+y})$$

si ha

$$\nabla f(1, 1) = 0$$

e quindi $(1, 1)$ è un punto critico per f.

Essendo $f(1, 1) = -2 \cdot e^2$, $\nabla f(1, 1) = 0$, il piano tangente

$$z = f(1, 1) + f_x(1, 1)(x - 1) + f_y(1, 1)(y - 1)$$

risulta

$$z = -2 \cdot e^2.$$

Calcoliamo ora la matrice hessiana. Notiamo che

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x, y) &= (2x + 2 + x^2 + y^2 + 2x - 4)e^{x+y} = (x^2 + y^2 + 4x - 2)e^{x+y} \\
f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) &= (2y + x^2 + y^2 + 2x - 4)e^{x+y} = (x^2 + y^2 + 2x + 2y - 4)e^{x+y} \\
f_{yy}(x, y) &= (2y + 2 + x^2 + y^2 + 2y - 4)e^{x+y} = (x^2 + y^2 + 4y - 2)e^{x+y}
\end{aligned}$$

Così la matrice hessiana di f in $(-1, 1)$ risulta

$$H(1, 1) = \begin{pmatrix} 4e^2 & 2e^2 \\ 2e^2 & 4e^2 \end{pmatrix}$$

La matrice hessiana $H(1, 1)$ è definita positiva in quanto $H(1, 1)_{1,1} = 4e^2 > 0$ e

$$det(H(1, 1)) = 4e^2 \cdot 4e^2 - 2e^2 \cdot 2e^2 = 12e^4 > 0$$

e quindi il punto $(1, 1)$ è di minimo locale.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende esclusi i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.

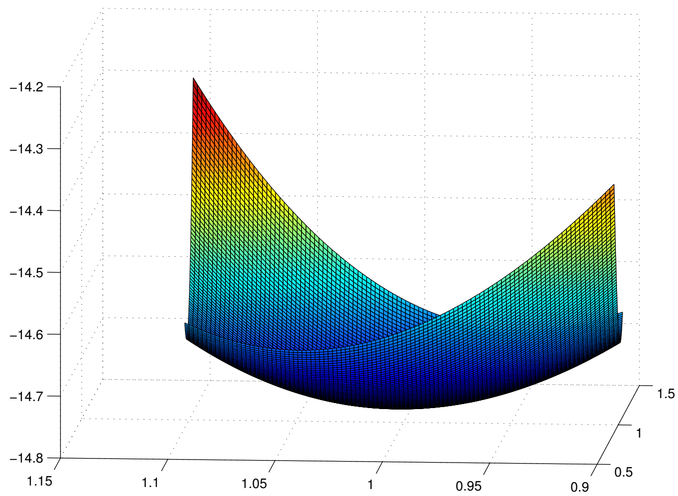

Figura 2: Grafico di f in un intorno di $(1, 1)$.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2015-2016

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

17 febbraio 2016

IAM: es 1, 2, 3, 4 (due ore). IAM1, v.o.: es 1, 2 (un'ora) . IAM2, v.o.: es 3, 4 (un'ora). IAM1+2: es 1, 2, 3, 4 (due ore)

TEMA 2

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = (4 - x^2)e^{-|x|}$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) Calcolare la derivata seconda di f e determinare gli intervalli di concavità e convessità con eventuali punti di flesso.

(e) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 (8 punti)
Calcolare il valore del limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - x + \arctan(x^2)}{\sqrt{1+x} - 1 - \sin(\frac{1}{2}x)}.$$

Esercizio 3 (8 punti)
i) Calcolare

$$\int \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{x^5}dx.$$

(sugg: operare il cambio di variabile $t = \frac{1}{x^2}$)

ii) Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale converge:

$$\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{x^\alpha}dx.$$

Calcolare il valore dell'integrale per $\alpha = 5$ usando il punto precedente.

Esercizio 4 (8 punti)
Data la funzione $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 12)e^{x+y}$, verificare che $(2, 2)$ è un punto critico. Scrivere l'equazione del piano tangente al suo grafico in tale punto. Determinare la matrice Hessiana della funzione nel punto $(2, 2)$ e dedurne, se possibile, la natura del punto.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.