ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2015-2016

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

20 settembre 2016

IAM: es 1, 2, 3, 4 (due ore). IAM1, v.o.: es 1, 2 (un'ora) . IAM2, v.o.: es 3, 4 (un'ora). IAM1+2: es 1, 2, 3, 4 (due ore)

TEMA 1

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = 3\sin^2 x - 2\sin^3 x.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità e il segno della funzione;

(b) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f;

(c) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento

(a)

- Determinare il dominio: $(-\infty, +\infty)$ (somma di funzioni continue in $\mathbb{R}$).
- Eventuali simmetrie: la funzione non è pari o dispari.
- Periodicità: essendo sin periodica di periodo 2π, necessariamente lo è f con periodo almeno 2π.
- Segno di f: In virtù della periodicità, studiamo il segno esclusivamente per $x \in [0, 2\pi)$. Poniamo $y = \sin(x)$ e osserviamo che

$$f(x) = 3\sin^2 x - 2\sin^3 x = 3y^2 - 2y^3 = y^2(3 - 2y) = g(y).$$

Evidentemente, per $y \neq 0$, si ha $g(y) > 0$ se e solo se $3/2 > y$, sempre verificata perchè $|y| = |\sin(x)| \leq 1 < 3/2$. Ovviamente $g(y) = 0$ Quindiper qualsiasi $x \in (0, 2\pi)$ si ha $f(x) > 0$, mentre $f(0) = 0$.

(b) La funzione è somma di funzioni derivabili (con continuità) in $\mathbb{R}$ e quindi è pure derivabile in $\mathbb{R}$. Ne deriva che in particolare è derivabile in $\mathbb{R}$. Inoltre

$$f'(x) = 6\sin(x)\cos(x) - 6\sin^2(x)\cos(x) = 6\sin(x)\cos(x)(1 - \sin(x)) = 3\sin(2x)(1 - \sin(x)).$$

Determiniamo i minimi i massimi in $[0, 2\pi)$. Dalla periodicità, se $x^* \in [0, 2\pi)$ è un'estremo, allora lo sono pure $x^* + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Osserviamo che $(1 - \sin(x)) \geq 0$ e quindi il segno della derivata è quello di $\sin(2x)$. Di conseguenza, la derivata è positiva in $(0, \pi/2) \cup (\pi, (3/2)\pi)$, nulla in 0, $\pi/2$, π, $(3/2)\pi$ e negativa altrove. Da queste osservazioni, analizzando dove la funzione cresce o

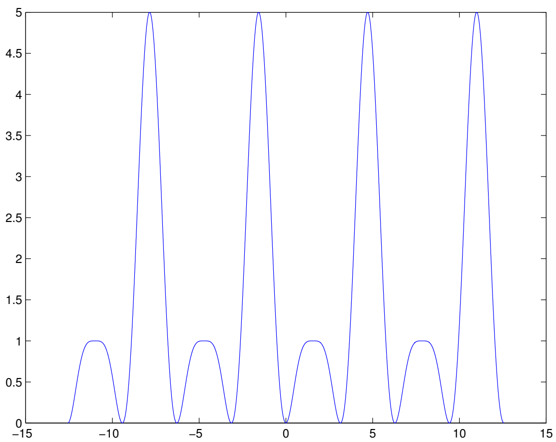

Figura 1: Grafico di f in $(-4\pi, 4\pi)$.

decresce, si vede facilmente che 0 è un minimo, $\pi/2$ è quindi un massimo, π un minimo e $(3/2)\pi$ un massimo. Osserviamo in particolare che $f(0) = 0$, $f(\pi/2) = 3\sin^2(\pi/2) - 2\sin^3(\pi/2) = 1$, $f(\pi) = 3\sin^2(\pi) - 2\sin^3(\pi) = 0$, $f(3\pi/2) = 3\sin^2(3\pi/2) - 2\sin^3(3\pi/2) = 5$. Di conseguenza, 0, π sono minimi assoluti e $3\pi/2$ è massimo assoluto.

(c) Per il grafico si veda la figura.

Esercizio 2 (8 punti)
Determinare il valore del limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{e^x - \cos\sqrt{x} - \frac{3}{2}x}.$$

Svolgimento Osserviamo che il numeratore è asintotico con x^2. Per quanto riguarda il denominatore,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^6) \Rightarrow \cos(\sqrt{x}) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^3)$$

e quindi

$$\begin{aligned} e^x - \cos\sqrt{x} - \frac{3}{2}x &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) - \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^3)\right) - \frac{3}{2}x \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{24} + o(x^3) = \frac{11}{24}x^2 + o(x^3) \qquad (1) \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{e^x - \cos\sqrt{x} - \frac{3}{2}x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{\frac{11}{24}x^2 + o(x^3)} = \frac{24}{11}.$$

Esercizio 3 (8 punti)
i) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{(\ln^2 x + \ln x - 2)} \frac{1}{x} dx.$$

ii) Dire per quali $\alpha > 0$ converge il seguente integrale generalizzato

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{(\ln^2 x + \ln x - 2)} \frac{1}{x^\alpha} dx.$$

Calcolare il valore dell'integrale per $\alpha = 1$.

Svolgimento (i) Posto $y = \ln(x)$, abbiamo che $dy = \frac{1}{x} dx$ e quindi

$$\int \frac{1}{(\ln^2 x + \ln x - 2)} \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{(y^2 + y - 2)} dy.$$

Inoltre, essendo $y^2 + y - 2 = 0$ per $y = 1$ e $y = -2$, abbiamo che $y^2 + y - 2 = (y-1)(y-2)$, e utilizzando tecniche note, deduciamo che per qualche A, B,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(y^2 + y - 2)} dy &= \int \frac{1}{(y-1)(y+2)} dy \\ &= \int \left(\frac{A}{(y-1)} + \frac{B}{(y+2)} \right) dy = \int \left(\frac{Ay + 2A + By - B}{(y-1)(y+2)} \right) dy \end{aligned}$$

Dovendo essere $1 = Ay + 2A + By + 2B$, abbiamo che A, B verificano il sistema

$$\begin{cases} 2A - B = 1 \\ 2A + 2B = 0 \end{cases}$$

e quindi per sostituzione $A = 1/3$, $B = -1/3$.

Così

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(y^2 + y - 2)} dy &= \int \frac{1}{(y-1)(y+2)} dy \\ &= \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{(y-1)} - \frac{1}{(y+2)} \right) dy = \frac{1}{3} \left(\ln(|y-1|) - \ln(|y+2|) \right) \\ &= \frac{1}{3} \ln \left(\frac{|y-1|}{|y+2|} \right) + C = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{|\ln(x) - 1|}{|\ln(x) + 2|} \right) + C \end{aligned}$$

(ii) Osserviamo per prima cosa che da $y^2 + y - 2 = (y-1)(y+2)$, per $y = \ln(x)$,

$$\ln^2 x + \ln x - 2 = (\ln(x) - 1)(\ln(x) + 2)$$

la funzione $\ln^2 x + \ln x - 2$ si annulla solo quando $\ln(x) = 1$ oppure $\ln(x) = -2$ e quindi in $x = e \approx 2.7183$ e $x = e^{-2} \approx 0.1353$. Di conseguenza nell'intervallo di integrazione $(3, +\infty)$, l'integranda è continua e positiva in quanto il suo denominatore è una funzione continua positiva.

Inoltre, per $x \to +\infty$,

$$\ln^2 x + \ln x - 2 \sim \ln^2(x)$$

e quindi l'integrale generalizzato

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{(\ln^2 x + \ln x - 2)} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

esiste finito se e solo se esiste finito

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{\ln^2 x} \frac{1}{x^\alpha} dx.$$

Utilizzando quanto noto per integrali generalizzati con integrande del tipo $\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta(x)}$, deduciamo che l'integrale richiesto converge se e solo se $\alpha \geq 1$.

Nel caso $\alpha = 1$, per quanto visto nel punto (i), abbiamo che dalla continuità del logaritmo

$$\begin{aligned}
\int_3^{+\infty} \frac{1}{(\ln^2 x + \ln x - 2)} \frac{1}{x} dx &= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{3} \ln \left(\frac{|\ln(x) - 1|}{|\ln(x) + 2|} \right) - \frac{1}{3} \ln \left(\frac{|\ln(3) - 1|}{|\ln(3) + 2|} \right) \\
&= \frac{1}{3} \ln \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{|\ln(x) - 1|}{|\ln(x) + 2|} \right) - \frac{1}{3} \ln \left(\frac{|\ln(3) - 1|}{|\ln(3) + 2|} \right) \\
&= \frac{1}{3} \ln(1) - \frac{1}{3} \ln \left(\frac{|\ln(3) - 1|}{|\ln(3) + 2|} \right) = -\frac{1}{3} \ln \left(\frac{|\ln(3) - 1|}{|\ln(3) + 2|} \right).
\end{aligned}$$

Esercizio 4 (8 punti)
Si consideri la funzione

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - xy.$$

i) Trovare i punti critici di $f(x, y)$ e determinarne la natura.
ii) Trovare, se esistono, massimi e minimi assoluti di $f(x, y)$ su $K = [0, 1] \times [0, 1]$.

Svolgimento i) Per prima cosa osserviamo che

$$grad\, f(x) = (3x^2 - y, 3y^2 - x)$$

e che tale quantitá é il vettore nullo se e solo se

$$\begin{cases} 3x^2 - y = 0 \\ 3y^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x^2 \\ 3y^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x^2 \\ 27x^4 - x = 0 \end{cases}$$

Essendo

$$27x^4 - x = x(27x^3 - 1)$$

deduciamo che i punti critici sono $(0, 0)$, $(1/3, 1/3)$.

Per quanto riguarda la matrice hessiana, abbiamo

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 9x & -1 \\ -1 & 9y \end{pmatrix}$$

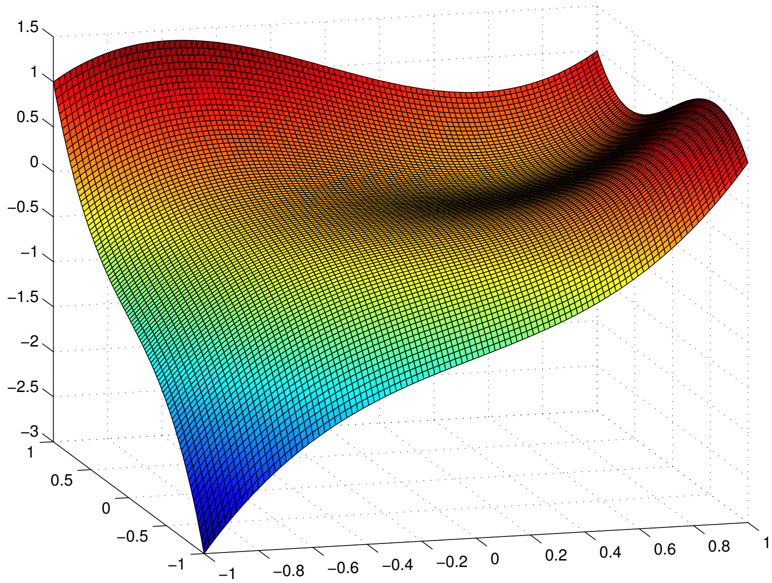

Figura 2: Grafico di f nel quadrato $[-1,1] \times [-1,1]$.

e quindi

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è -1, e

$$Hf(1/3,1/3) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è $9 - 1 = 8$.

Ne consegue che $(0,0)$ è un punto di sella mentre $(1/3,1/3)$ è un minimo locale stretto.

ii) Analizziamo la funzione nel quadrato $[0,1] \times [0,1]$. Di sicuro $(1/3,1/3)$ è un minimo locale. Vediamo quali sono i massimi e i minimi in questa regione.

- Nel lato che connette $(0,0)$ a $(1,0)$, l'equazione è $y = 0$, per $x \in [0,1]$. Quindi la restrizione di $f(x,y) = x^3 + y^3 - xy$ a questo lato è

  $$f(x,y) = f(x,0) = x^3$$

  ed ha minimo in $(0,0)$ e massimo in $(1,0)$, data la monotonia crescente di x^3 in $[0,1]$.

- Nel lato che connette $(1,0)$ a $(1,1)$, l'equazione è $x = 1$, per $y \in [0,1]$. Quindi la restrizione di $f(x,y) = x^3 + y^3 - xy$ a questo lato è

  $$f(x,y) = f(1,y) = 1 + y^3 - y.$$

  Poichè $D(1 + y^3 - y) = 3y^2 - 1$ e $3y^2 - 1 > 0$ per $y \in [0,1]$ se e solo se $y > \frac{1}{\sqrt{3}}$, deduciamo che i punti critici su tale lato sono $(1,0)$, $(1, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(1,1)$).

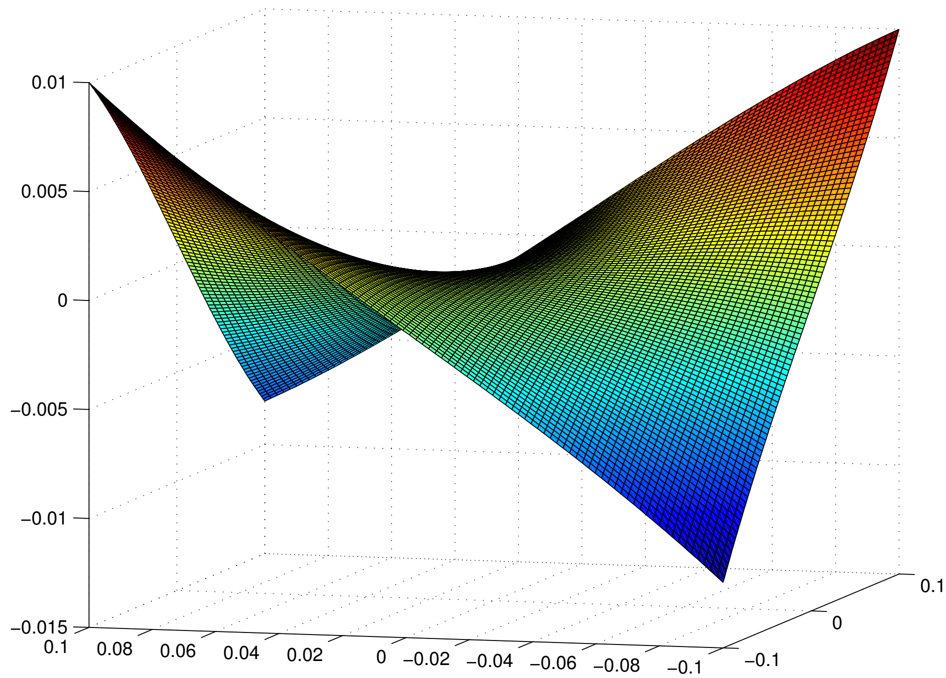

Figura 3: Grafico di f in un intorno dell'origine $(0, 0)$.

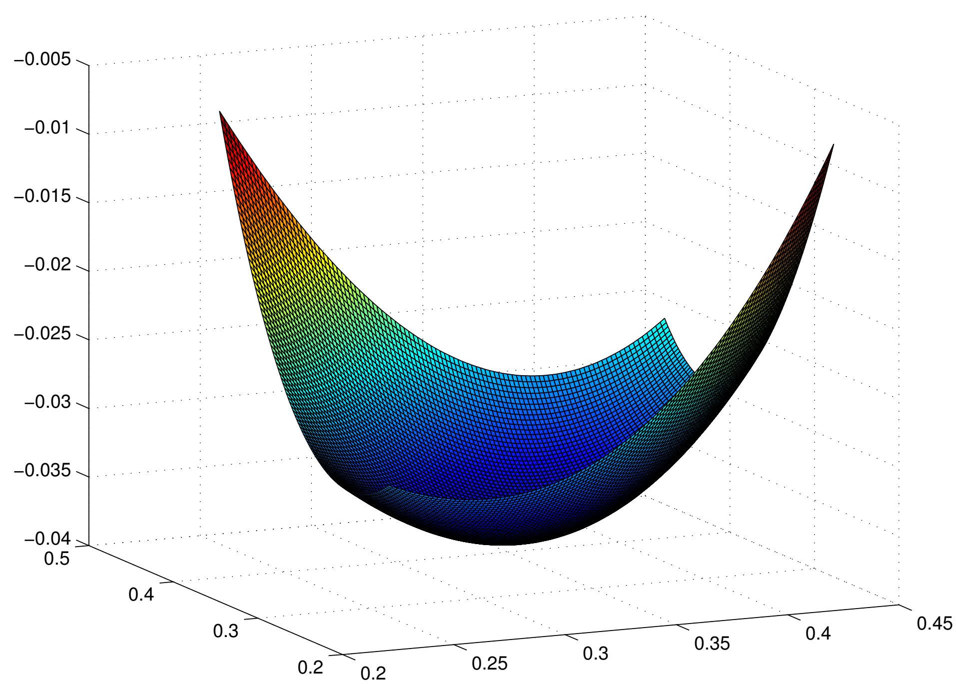

Figura 4: Grafico di f in un intorno dell'origine $(1/3, 1/3)$.

- Nel lato che connette $(0,1)$ a $(1,1)$, l'equazione è $y=1$, per $x\in[0,1]$. Quindi la restrizione di $f(x,y)=x^3+y^3-xy$ a questo lato è

  $$f(x,y)=f(x,1)=1+x^3-x.$$

  e con ragionamenti analoghi al punto precedente, si ottiene che i punti critici su tale lato sono $(0,1)$, $(\frac{1}{\sqrt{3}},1)$ e $(1,1)$.

- Nel lato che connette $(0,0)$ a $(0,1)$, l'equazione è $x=0$, per $y\in[0,1]$. Quindi la restrizione di $f(x,y)=x^3+y^3-xy$ a questo lato è

  $$f(x,y)=f(0,y)=y^3$$

  e analogamente al primo punto, ha minimo in $(0,0)$ e massimo in $(0,1)$, data la monotonia crescente di y^3 in $[0,1]$.

Essendo

- $f(1/3,1/3)=-1/27$;
- $f(0,0)=0$;
- $f(1,0)=1$;
- $f(1,\frac{1}{\sqrt{3}})=1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3-\frac{1}{\sqrt{3}}\approx 0.6151$;
- $f(1,1)=1$;
- $f(\frac{1}{\sqrt{3}},1)=1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3-\frac{1}{\sqrt{3}}\approx 0.6151$;
- $f(0,1)=1$;

deduciamo che i massimi assoluti, vincolati nel quadrato $[0,1]\times[0,1]$, corrispondono ai punti $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, mentre il punto $(1/3,1/3)$ è il minimo assoluto in tale regione.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

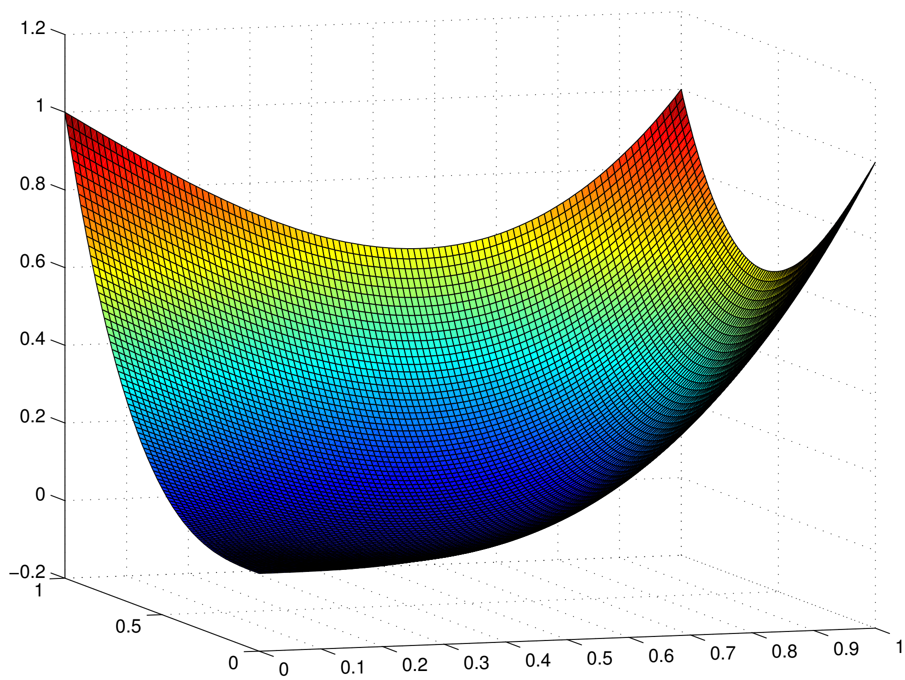

Figura 5: Grafico di f nel quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$.