ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2015-2016

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

7 luglio 2016

IAM: es 1, 2, 3, 4 (due ore). IAM1, v.o.: es 1, 2 (un'ora) . IAM2, v.o.: es 3, 4 (un'ora). IAM1+2: es 1, 2, 3, 4 (due ore)

TEMA 1

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \ln x - \arctan(x-1)$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento

(a)

- Determinare il dominio: $(0, +\infty)$.
- Eventuali simmetrie: la funzione non ha simmetrie.
- Periodicità: la funzione non è periodica.
- Segno di f: non richiesto.

(b-c) La funzione f è sempre continua nel dominio, poichè lo sono $\log(x)$ e $\arctan(x-1)$. Inoltre è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$, dato che lo sono $\log(x)$ e $\arctan(x-1)$.

Non è difficile vedere che

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$,
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x} - \lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan(x-1)}{x} = 0 - 0 = 0$,
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

Di conseguenza, non vi è un asintoto orizzontale a 0^+ e non si presentano asintoti a $+\infty$.

Per lo studio dei massimi e minimi, da

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+(x-1)^2} = \frac{1+(x-1)^2 - x}{x(1+(x-1)^2)} = \frac{(x-1)^2-(x-1)}{x(1+(x-1)^2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{x(1+(x-1)^2)} \qquad (1)$$

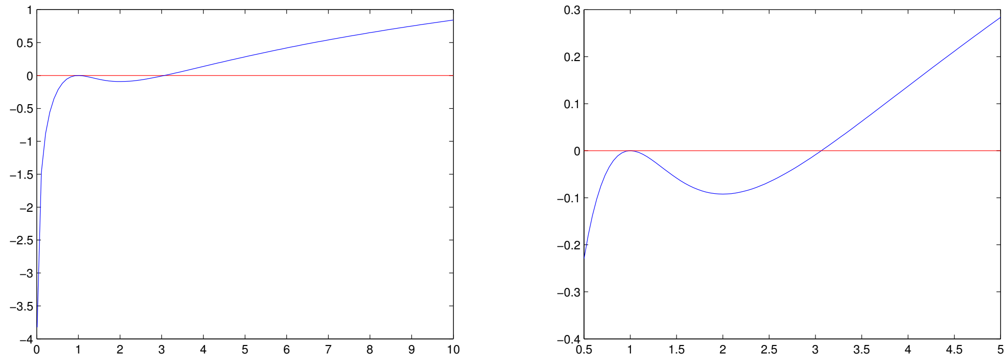

Figura 1: Grafico di f in $(0, 10)$ e in $(0.5, 5)$.

si ha che, visto che nel dominio di f il denominatore di (**??**) è sempre positivo, $f'(x) > 0$ se e solo se $(x-1)(x-2) > 0$ cioè $x \in (0, 1)$ oppure $x \in (2, +\infty)$. In particolare, dalla continuità di f' nel dominio, i punti estremi sono $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$, rispettivamente di massimo locale in cui $f(1) = 0$ e minimo locale in cui $f(2) = \ln(2) - \arctan(1) = \ln(2) - \pi/4 \approx -0.09$. Non esistono minimi e massimi globali.

(d) Per il grafico si veda la figura.

Esercizio 2 (8 punti)
Determinare il valore del limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^3} - 6\frac{\sin x}{x} + 5}{x^2 + x^5}.$$

Svolgimento

Svolgiamo l'esercizio con la tecnica degli o-piccoli. Osserviamo che in un intorno di 0

$$e^x = 1 + x + o(x) \Rightarrow e^{-x^3} = 1 - x^3 + o(x^3)$$

e inoltre

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \Rightarrow \frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2).$$

Di conseguenza, per $x \to 0$,

$$\begin{aligned} e^{-x^3} - 6\frac{\sin(x)}{x} + 5 &= (1 - x^3 + o(x^3)) - 6\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) + 5 \\ &= x^2 - x^3 + o(x^2) + o(x^3) = x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

D'altra parte, per $x \to 0$,

$$x^2 + x^5 = x^2\left(1 + \frac{x^5}{x^2}\right) = x^2(1 + x^3) = x^2 + o(x^2)$$

da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^3} - 6\frac{\sin x}{x} + 5}{x^2 + x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1 + \frac{o(x^2)}{x^2})}{x^2(1 + \frac{o(x^2)}{x^2})} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Esercizio 3 (8 punti)
i) Calcolare

$$\int x \arctan x \, dx.$$

ii) Determinare il valore dell'integrale

$$\int_{-2}^{1} |x| \arctan x \, dx.$$

Svolgimento

(a) Si procede integrando per parti. Ricordando che $D \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e $\int x = \frac{x^2}{2} + C$,

$$\begin{aligned}
\int x \arctan x \, dx &\overset{(PARTI)}{=} \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx \\
&= \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{(1+x^2) - 1}{1+x^2} \, dx \\
&= \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} \left(\int 1 \, dx - \int \frac{1}{1+x^2} \, dx \right) \\
&= \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} (x - \arctan(x)) \\
&= \frac{1}{2} \left(x^2 \arctan(x) + \arctan(x) - x \right). \qquad (2)
\end{aligned}$$

(b) Osserviamo che $|x| = x$ se $x > 0$ e $|x| = -x$ se $x \leq 0$. Di conseguenza conviene scrivere l'integrale richiesto come somma di due integrali

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{1} |x| \arctan x \, dx &= \int_{-2}^{0} |x| \arctan x \, dx + \int_{0}^{1} |x| \arctan x \, dx \\
&= \int_{-2}^{0} -x \arctan x \, dx + \int_{0}^{1} x \arctan x \, dx \\
&= -\int_{-2}^{0} x \arctan x \, dx + \int_{0}^{1} x \arctan x \, dx \qquad (3)
\end{aligned}$$

Dall'esercizio precedente, per il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{0} x \arctan x \, dx &= \frac{1}{2} \left(0^2 \arctan(0) + \arctan(0) - 0 \right) - \frac{1}{2} \left((-2)^2 \arctan(-2) + \arctan(-2) - (-2) \right) \\
&= -\frac{1}{2} (4 \arctan(-2) + \arctan(-2) + 2) \\
&= -\frac{1}{2} (5 \arctan(-2) + 2) = -\frac{5}{2} \arctan(-2) - 1. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Similmente

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\arctan x\,dx &= \frac{1}{2}\big(1^2\arctan(1)+\arctan(1)-1\big)-\frac{1}{2}\big((0)^2\arctan(0)+\arctan(0)-(0)\big)\\ &= \frac{1}{2}(2\arctan(1)-1)=\arctan(1)-\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}. \qquad (5)\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_{-2}^1 |x|\arctan x\,dx &= -\int_{-2}^0 x\arctan x\,dx+\int_0^1 x\arctan x\,dx\\ &= -\left(-\frac{5}{2}\arctan(-2)-1\right)+\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{5}{2}\arctan(-2)+1+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}\arctan(-2)+\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}. \qquad (6)\end{aligned}$$

Esercizio 4 (8 punti)
Si consideri la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(\alpha-2)^n}{n^2-n}$$

dove $\alpha\in\mathbb{R}$.
i) Studiare, al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$, la convergenza assoluta della serie.
ii) Studiare, al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$, la convergenza (semplice) della serie.

Svolgimento

(i) Studiamo la convergenza assoluta della serie e quindi della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left|\frac{(\alpha-2)^n}{n^2-n}\right|=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{|(\alpha-2)^n|}{n^2-n}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{|\alpha-2|^n}{n^2-n}.$$

Se $|\alpha-2|>1$, cioè $\alpha>3$ oppure $\alpha<1$, la serie $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{|\alpha-2|^n}{n^2-n}$ non converge, in quanto il termine n-simo

$$a_n=\frac{|\alpha-2|^n}{n^2-n}$$

non è infinitesimo.

Se $|\alpha-2|=1$, la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{|\alpha-2|^n}{n^2-n}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2-n}$$

è a termini positivi e asintotica a $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ e quindi convergente. Di conseguenza per $\alpha=1$ e $\alpha=3$, la serie è assolutamente convergente.

Mostriamo ora che se $|\alpha-2|<1$, cioè $\alpha\in(1,3)$, la serie è assolutamente convergente. Lo facciamo in più modi.

- Dal criterio della radice, essendo la serie a termini positivi, e

$$\lim_k \left(\frac{|\alpha-2|^k}{k^2-k}\right)^{1/k} = |\alpha - 2| \lim_k \left(\frac{1}{k^2-k}\right)^{1/k} = |\alpha - 2| \lim_k e^{\frac{1}{k}\cdot\log(\frac{1}{k^2-k})} = |\alpha - 2| \lim_k e^{-\frac{\log(k^2-k)}{k}}.$$

Usando la formula di De L'Hopital, si vede facilmente che

$$\lim_k -\frac{\log(k^2-k)}{k} = 0$$

e quindi

$$\lim_k \left(\frac{|\alpha-2|^k}{k^2-k}\right)^{1/k} = |\alpha-2| \cdot \lim_k e^{-\frac{\log(k^2-k)}{k}} = |\alpha-2| < 1,$$

per cui la serie richiesta è assolutamente convergente per $|\alpha - 2| < 1$.

- Dal criterio del confronto asintotico, essendo la serie a termini positivi e $|\alpha - 2| < 1$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|\alpha-2|^n}{n^2-n} \sim \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|\alpha-2|^n}{n^2} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

in cui, come ben noto, la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ risulta convergente e di conseguenza lo è pure $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|\alpha-2|^n}{n^2-n}$.

- Dal criterio del rapporto, essendo la serie a termini positivi, e

$$a_k = \frac{|\alpha-2|^k}{k^2-k} > 0$$

basta provare che $\lim_k \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$. Ma ciò è vero in quanto essendo per ipotesi $|\alpha - 2| < 1$

$$\lim_k \frac{\frac{|\alpha-2|^{k+1}}{(k+1)^2-(k+1)}}{\frac{|\alpha-2|^k}{k^2-k}} = |\alpha-2| \cdot \lim_k \frac{k^2-k}{(k+1)^2-(k+1)} = |\alpha-2| < 1.$$

Riassumendo:

- se $\alpha > 3$ la serie non converge assolutamente;
- se $1 \leq \alpha \leq 3$ la serie converge assolutamente ;
- se $\alpha < 1$ la serie non converge assolutamente.

(ii) Se $1 \leq \alpha \leq 3$ la serie converge assolutamente e quindi pure semplicemente.

Se $\alpha < 1$ si verifica che, posto $a_n = \frac{(\alpha-2)^n}{n^2-n}$, $\lim_n a_n$ non esiste, mentre se $\alpha > 3$ allora $\lim_n a_n = +\infty$ e di conseguenza per questi valori di α la serie non è semplicemente convergente.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.