ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2015-2016

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

28 gennaio 2016

TEMA 1

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arccos(\sqrt{|x|} - 1).$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Svolgimento

(a)

- Determiniamo il dominio. Poichè $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$, poniamo $-1 \leq \sqrt{|x|} - 1 \leq 1$ ovvero $0 \leq \sqrt{|x|} \leq 2$. Di conseguenza il dominio risulta $D = [-4, 4]$.
- Eventuali simmetrie: la funzione è pari.
- Periodicità: la funzione non è periodica (non è definita nemmeno in tutto $\mathbb{R}$).
- Segno di f. Visto che il codominio della funzione è contenuto in $[0, \pi]$ essa risulta sempre positiva.

(b-c) La funzione f è sempre continua, poichè lo sono $\sqrt{|x|} - 1$ e arccos, ed è derivabile se $x \neq 0$ e $x \neq \pm 1$, in quanto arccos è ovunque derivabile in $(-1, 1)$ e $|x|$ è derivabile se $x \neq 0$. Dopo studieremo la derivabilità in $x = 0$ e agli estremi del dominio.

La funzione, essendo continua in $\mathbb{R}$, non necessita di essere prolungata per continuità .

Visto che il dominio di f è l'insieme chiuso e limitato $[-4, 4]$ non ha senso chiedersi di calcolare gli asintoti. Per lo studio dei massimi e minimi, ci limitiamo a studiare, visto che la funzione è pari, quelli in $[0, 4]$, deducendo gli altri per simmetria.

Osservato che in $[0, 4]$ si ha $f(x) = \arccos(\sqrt{|x|} - 1) = \arccos(\sqrt{x} - 1)$, ricaviamo facilmente che per $x \in (0, 4)$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(-\frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{x} - 1)^2}} \right).$$

La derivata è negativa in $(0, 4)$. Quindi la funzione risulta decrescente in $(0, 4)$. Essendo pari, risulta crescente in $(-4, 0)$. Dalla continuità della funzione si deduce che possiede massimo assoluto in 0 e minimi assoluti in ± 4.

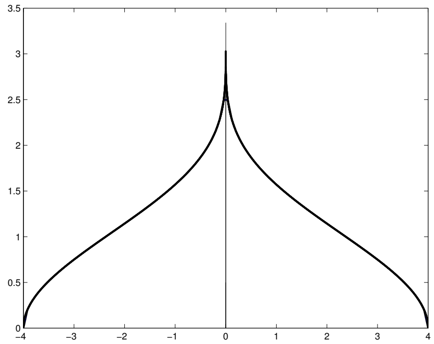

Figura 1: Grafico di f in $(-4,4)$.

Per quanto riguarda i limiti della derivata nei punti significativi, essendo la funzione pari, $f'(-x) = -f'(x)$ e visto che $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$ deduciamo che $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$.

Quindi f non è dervabile in $x = 0$.

Similmente

$$\lim_{x\to 4^-} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 4^+} f'(x) = +\infty.$$

(d) Per il grafico si veda la figura.

Esercizio 2 (8 punti)
Determinare al variare di $\alpha > 0$ reale il valore del limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(x^\alpha) - x^4}{x^3 + e^{x^2} - 1}.$$

Facoltativo: Determinare i valori del parametro $b > 0$ reale affinché la funzione $f(x)$ sia continua in 0:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan(x^4)-x^4}{x^3+e^{x^2}-1} & x > 0, \\ (1-x)^{\frac{x}{x^2+5}} - b & x \leq 0, \end{cases}$$

Svolgimento

Studiamo il numeratore. Da

$$\arctan(x) = x - (1/3)x^3 + o(x^5)$$

deduciamo che

$$\arctan(x^\alpha) = x^\alpha - (1/3)x^{3\alpha} + o(x^{5\alpha}).$$

Quindi

$$\arctan(x^\alpha) - x^4 = x^\alpha - (1/3)x^{3\alpha} + o(x^{5\alpha}) - x^4$$

cioè

- per $\alpha < 4$ si ha $\arctan(x^\alpha) - x^4 \sim x^\alpha$,
- per $\alpha = 4$ si ha $\arctan(x^\alpha) - x^4 \sim -(1/3)x^{12}$,
- per $\alpha > 4$ si ha $\arctan(x^\alpha) - x^4 \sim -x^4$.

Per quanto riguarda il denominatore, visto che

$$e^x = 1 + x$$

necessariamente $e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^4)$, cioè $e^{x^2} - 1 = x^2 + o(x^4)$ da cui

$$x^3 + e^{x^2} - 1 = x^3 + x^2 + o(x^4) \sim x^2.$$

Di conseguenza, il limite $L = \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(x^\alpha)-x^4}{x^3+e^{x^2}-1}$ da calcolare è tale che

- per $\alpha < 4$ risulta
$$L = \lim_{x\to 0^+} x^\alpha / x^2$$
cioè $L = +\infty$ per $\alpha \in (0, 2)$, $L = 1$ per $\alpha = 2$ e $L = 0$ per $\alpha \in (2, 4)$.
- per $\alpha = 4$ risulta
$$L = \lim_{x\to 0^+} -(1/3)x^{12}/x^2 = 0.$$
- per $\alpha > 4$ risulta
$$L = \lim_{x\to 0^+} -x^4/x^2 = 0.$$

(Facoltativo). Osserviamo che

$$\lim_{x\to 0^-} (1-x)^{\frac{x}{x^2+5}} - b = \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{x}{x^2+5}\ln(1-x)} - b = \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{-x^2}{x^2+5}} - b = 1 - b$$

Quindi, perchè sia continua in 0, deve essere $0 = 1 - b$ cioè $b = 1$.

Esercizio 3 (8 punti)
Calcolare l'integrale definito

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^2 x + \sin x} dx.$$

Svolgimento

Posto $y = \sin x$, usando il metodo dei fratti semplici, abbiamo

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + \sin x} dx &= \int \frac{1}{y^2 + y} dy = \int \frac{1}{y} dy - \int \frac{1}{y+1} dy \\
&= \ln(|y|) - \ln(|y+1|) + C = \ln(|y/(y+1)|) + C \\
&= \ln\left(\frac{|\sin(x)|}{|\sin(x) + 1|}\right) + C
\end{aligned}$$

Per il teorema fondamentale del calcolo,

$$
\begin{aligned}
\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^2 x + \sin x} dx &= \ln\left(\frac{|\sin(\pi/2)|}{|\sin(\pi/2)+1|}\right) - \ln\left(\frac{|\sin(\pi/4)|}{|\sin(\pi/4)+1|}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1}{1+1}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right).
\end{aligned}
$$

Facoltativo: Con la sostituzione usata prima $y = \sin x$, l'integrale

$$
\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sin^2 x + \sin x} dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{y^2+y} dy
$$

La funzione $g(t) = \frac{1}{y^2+y} \sim \frac{1}{y}$ per $y \to 0$, quindi l'integrale non converge per il criterio del confronto asintotico.

Esercizio 4 (8 punti)
Studiare la convergenza e la convergenza assoluta della serie

$$
\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).
$$

.

Svolgimento

Studiamo dapprima la convergenza assoluta perché essa implica la convergenza. Visto che $a_n > 0$, la serie è assolutamente convergente se e solo se risulta convergente

$$
\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).
$$

Poichè $\cos(x) = 1 - x^2/2 + o(x^4)$ abbiamo che $1 - \cos(x) = x^2/2 + o(x^4)$ e quindi

$$
1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{2n}
$$

e di conseguenza per il criterio del confronto asintotico $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$ diverge, per cui la serie

$$
\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).
$$

non è assolutamente convergente.

Studiamo ora la convergenza. Osserviamo che la serie è a segno alterno. Posto $a_n = \left(1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$, la successione $\{a_n\}$ è infinitesima e non negativa. Inoltre è decrescente. Infatti la successione $\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ è crescente in quanto $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ è decrescente, $\cos t$ è decrescente per $t \in (0,1)$ e la composizione di una funzione decrescente con una successione decrescente dà una successione crescente. Se $\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ è crescente, allora $1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ è decrescente. Quindi per il Criterio di Leibniz la serie è semplicemente convergente.

ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2015-2016

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

28 gennaio 2016

TEMA 2

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arcsin(\sqrt{|x|} - 1).$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Esercizio 2 (8 punti)
Determinare al variare di $a > 0$ reale il valore del limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2} - 1 + x^5}{\tan(x^a) - x^4}.$$

Facoltativo: Determinare i valori del parametro $b > 0$ reale affinché la funzione $f(x)$ sia continua in $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2}-1+x^5}{\tan(x^4)-x^4} & x > 0, \\ (1-x)^{\frac{x}{x^2+6}} - b & x \le 0, \end{cases}$$

Esercizio 3 (8 punti)
Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^2 x + 2\cos x} dx.$$

Facoltativo: dire se $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos^2 x+2\cos x} dx$ converge.

Esercizio 4 (8 punti)
Studiare la convergenza e la convergenza assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(e^{\frac{2}{\sqrt{n}}} - 1\right).$$

.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende <u>esclusi</u> i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.

ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2015-2016

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

28 gennaio 2016

TEMA 3

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arccos(1 - \sqrt{|x|}).$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Esercizio 2 (8 punti)
Determinare al variare di $\alpha > 0$ reale il valore del limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x^\alpha) - x^4}{x^3 + \log(1+x^2)}.$$

Facoltativo: Determinare i valori del parametro $b > 0$ reale affinché la funzione $f(x)$ sia continua in $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^4)-x^4}{x^3+\log(1+x^2)} & x > 0, \\ (1-x)^{\frac{x}{x^2+5}} - b & x \le 0, \end{cases}$$

Esercizio 3 (8 punti)
Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^2 x + \cos x} dx.$$

Facoltativo: dire se $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos^2 x + \cos x} dx$ converge.

Esercizio 4 (8 punti)
Studiare la convergenza e la convergenza assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(1 - \cos\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende <u>esclusi</u> i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.

ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2015-2016

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

28 gennaio 2016

TEMA 4

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arcsin(1 - \sqrt{|x|}).$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Esercizio 2 (8 punti)
Determinare al variare di $a > 0$ reale il valore del limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^5 + \log(1 + x^2)}{\sin(x^a) - x^3}.$$

Facoltativo: Determinare i valori del parametro $b > 0$ reale affinché la funzione $f(x)$ sia continua in $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^5+\log(1+x^2)}{\sin(x^3)-x^3} & x > 0, \\ (1-x)^{\frac{x}{x^2+5}} - b & x \le 0, \end{cases}$$

Esercizio 3 (8 punti)
Calcolare l'integrale definito

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{2\sin^2 x + \sin x} dx.$$

Facoltativo: dire se $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{2\sin^2 x+\sin x} dx$ converge.

Esercizio 4 (8 punti)
Studiare la convergenza e la convergenza assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(e^{\frac{3}{\sqrt{n}}} - 1\right).$$

.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende esclusi i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.