ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2016-2017

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

22 giugno 2017

TEMA 1

IAM: es 1, 2, 3, 4. IAM1, v.o.: es 1, 2. IAM2, v.o.: es 3, 4.

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2(\log x)^3.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, studiare la continuità e la derivabilità di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità e i limiti di f' se significativi;

(c) studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f;

(d) calcolare la derivata seconda di f (non è richiesto lo studio del suo segno);

(e) disegnare un grafico qualitativo di f.

Facoltativo: determinare gli intervalli di concavità e convessità con eventuali punti di flesso.

Svolgimento.

(a) Il dominio è $\{x \in \mathbb{R} |\ x > 0\}$. Non ci sono simmetrie o periodicità. La funzione si annulla in $x = 1$, è negativa per $x < 1$ e positiva per $x > 1$.

(b) Ricordando il limite notevole

$$\lim_{x\to 0^+} x^a(\log x)^b = 0, \quad \text{per } a > 0$$

abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} x^2(\log x)^3 = 0. \tag{1}$$

Inoltre non è difficile verificare che $\lim_{x\to+\infty} x^2(\log x)^3 = +\infty$ e che essendo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = \lim_{x\to+\infty} x(\log x)^3 = +\infty,$$

non ci sono asintoti obliqui. La funzione è continua in $[0, +\infty)$ prolungando per continuità $f(0) = 0$. Inoltre la derivata per $x \in \mathbb{R}^+\backslash\{0\}$ è

$$f'(x) = 2x(\log x)^3 + 3x^2(\log x)^2/x = x(\log x)^2(2\log(x) + 3).$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 2x(\log x)^3 + 3x(\log x)^2 = 0.$$

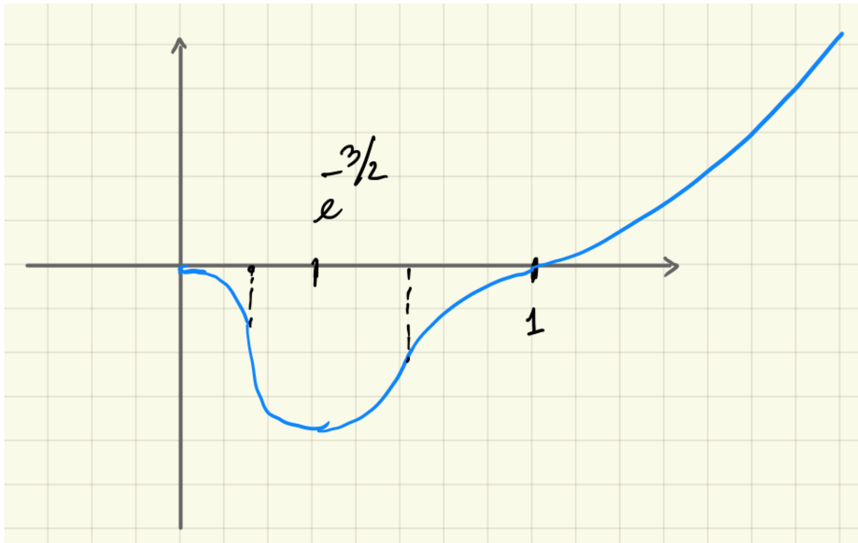

Figura 1: Grafico di f.

(c) Per studiare la monotonia determiniamo quando $f'(x) > 0$. Essendo $x(\log x)^2(2\log(x) + 3) > 0$ se e solo se $2\log(x) + 3 > 0$ ovvero $\log(x) > -3/2$, deduciamo che $f'(x) > 0$ se e solo se $x > \exp(-3/2) \approx 0.2231$. Osserviamo d'altra parte che $f'(x) = 0$ se e solo se $\log(x) = 0$ cioè $x = 1$ oppure $x = \exp(-3/2)$. Quindi è strettamente crescente per $x > \exp(-3/2)$ mentre è decrescente altrove. Il punto $\exp(-3/2)$ è di minimo. Il punto 1 non è estremo in quanto la funzione f è crescente in un suo intorno.

(d) Essendo $f'(x) = 2x(\log x)^3 + 3x(\log x)^2$ abbiamo

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2(\log x)^3 + 2x(3(\log(x))^2/x) + 3(\log x)^2 + 6x\log x/x \\ &= 2(\log x)^3 + 9(\log(x))^2 + 6\log(x). \end{aligned} \tag{2}$$

(e) Per il grafico si veda la figura.

(fac) Osserviamo che

$$f''(x) = 2(\log x)^3 + 9(\log(x))^2 + 6\log(x) = \log(x)(2(\log x)^2 + 9(\log(x)) + 6) \tag{3}$$

e

- $\log(x) > 0$ se e solo se $x > 1$;
- $2(\log x)^2 + 9(\log(x)) + 6 > 0$ se e solo se $\log(x) < (-9 - \sqrt{33})/4$ o $\log(x) > (-9 + \sqrt{33})/4$ ovvero $x < \exp((-9 - \sqrt{33})/4) \approx 0.025$ oppure $x > \exp((-9 + \sqrt{33})/4) \approx 0.443$,

la funzione è concava in $[0, \exp((-9 - \sqrt{33})/4)]$, convessa in $[\exp((-9 - \sqrt{33})/4), \exp((-9 + \sqrt{33})/4)]$, concava in $[\exp((-9 + \sqrt{33})/4), 1]$, convessa in $[1, +\infty)$.

Esercizio 2 (8 punti) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin(x^2) + \arctan(x^6)}{\cos x^3 - 1}.$$

Svolgimento.

Dalle formule di Maclaurin

- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^5)$,
- $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^5)$,
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^4)$,

abbiamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin(x^2) + \arctan(x^6)}{\cos x^3 - 1} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - (x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^{10})) + (x^6 - \frac{x^{18}}{3} + o(x^{30}))}{(1 - \frac{x^6}{2} + o(x^{12})) - 1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{7}{6}x^6}{-\frac{x^6}{2}} = -\frac{7}{3}. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Esercizio 3 (8 punti)

1. Calcolare l'integrale definito
$$\int_4^6 \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx.$$
2. Dire se
$$\int_4^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx$$
converge e, in caso affermativo, calcolarlo.

Svolgimento.

1. Osservato che $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$, abbiamo per qualche A, B,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx &= \int \frac{1}{(x-1)(x-3)} dx = A \int \frac{1}{(x-1)} dx + B \int \frac{1}{(x-3)} dx \\
&= \int \frac{A(x-3) + B(x-1)}{(x-1)(x-3)} dx = \int \frac{(A+B)x + (-3A - B)}{(x-1)(x-3)} dx. \qquad (5)
\end{aligned}$$

Per confronto deve essere

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -3A - B = 1 \end{cases}$$

ovvero $A = -\frac{1}{2}$ e $B = -\frac{1}{2}$.

Quindi

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{(x-1)} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x-3)} dx \\
&= -\frac{1}{2} \log(|x-1|) + \frac{1}{2} \log(|x-3|) + C. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Di conseguenza per il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\begin{aligned}
\int_4^6 \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx &= (-\frac{1}{2} \log(|6-1|) + \frac{1}{2} \log(|6-3|)) - (-\frac{1}{2} \log(|4-1|) + \frac{1}{2} \log(|4-3|)) \\
&= (-\frac{1}{2} \log(5) + \frac{1}{2} \log(3)) - (-\frac{1}{2} \log(3) + \frac{1}{2} \log(1)) = -\frac{1}{2} \log(5) + \log(3).
\end{aligned}$$

(b) L'integrale converge perchè l'integranda è asintotica a $1/x^2$ e $\int_4^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ è finito. Osserviamo che

$$\int \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx = -\frac{1}{2}\log(|x-1|) + \frac{1}{2}\log(|x-3|) + C = -\frac{1}{2}\log\left(\frac{|x-1|}{|x-3|}\right) + C \quad (7)$$

e quindi da $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\log\left(\frac{|x-1|}{|x-3|}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{|x-1|}{|x-3|}\right) = 0$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx &= -\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\log\left(\frac{|x-1|}{|x-3|}\right) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{|4-1|}{|4-3|}\right) \\ &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{|3|}{|1|}\right) = \frac{1}{2}\log(3). \quad (8)\end{aligned}$$

Esercizio 4 (8 punti)
Studiare al variare di $a \in \mathbb{R}$, 1) la convergenza assoluta, 2) la convergenza semplice della serie

$$\sum_n \frac{(a+1)^n}{n2^n}.$$

Svolgimento. Cominciamo a studiare la convergenza assoluta della serie, cioé la convergenza della serie

$$\sum_n |a_n| = \sum_n \frac{|a+1|^n}{n2^n}.$$

Applichiamo il criterio della radice, e otteniamo, ricordando che $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{|a+1|^n}{n2^n}} = \frac{|a+1|}{2}.$$

Se $\frac{|a+1|}{2} < 1$, quindi se $-2 < a+1 < 2$, o equivalentemente $-3 < a < 1$, la serie converge assolutamente.
Se $\frac{|a+1|}{2} > 1$, quindi se $a+1 < -2$ oppure $a+1 > 2$, o equivalentemente $a < -3$ oppure $a > 1$, la serie diverge assolutamente.
Se $\frac{|a+1|}{2} = 1$ allora la serie diventa la serie armonica

$$\sum_n \frac{1}{n}$$

e quindi diverge.

Studiamo ora la convergenza semplice.

Se la serie converge assolutamente, allora converge anche semplicemente, quindi la serie converge per $-3 < a < 1$.

Inoltre osserviamo che se $|a+1| > 2$, o equivalentemente $a < -3$ opprure $a > 1$, allora $\lim_n \frac{|a+1|^n}{n2^n} = +\infty$. Dunque il termine generale a_n non puó essere infinitesimo, dato che se $\lim_n a_n = 0$, allora anche $\lim_n |a_n| = 0$. Dato che non é soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza, la serie non converge.

Infine se $a = -3$ la serie diventa

$$\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$$

che converge per il criterio di Leibniz dato che $\frac{1}{n}$ é monotona decrescente e tende a 0. Se invece $a = 1$ la serie diventa la serie armonica

$$\sum_n \frac{1}{n}$$

e quindi diverge.

Riassumendo

$$\begin{cases} -3 < a < 1 & \text{la serie converge assolutamente e semplicemente} \\ a < -3,\ a > 1 & \text{la serie diverge assolutamente e non converge semplicemente} \\ a = 1 & \text{la serie diverge assolutamente e semplicemente} \\ a = -3 & \text{la serie diverge assolutamente e converge semplicemente.} \end{cases}$$