# ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

**Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2016-2017**

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

20 febbraio 2017

## TEMA 1

IAM: es 1, 2, 3, 4. IAM1, v.o.: es 1, 2. IAM2, v.o.: es 3, 4.

**Esercizio 1** (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - x - 1}$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di $f$;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, l'asintoto di $f$ per $x \to +\infty$ (non è richiesto l'asintoto di $f$ per $x \to -\infty$), eventuali punti in cui è possibile prolungare $f$ per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di $f$, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di $f$; calcolare i limiti di $f'$ se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di $f$.

**Facoltativo:** Calcolare la derivata seconda di $f$ e determinare gli intervalli di concavità e convessità con eventuali punti di flesso.

**Svolgimento**

(a) Il dominio $\Omega$ consiste nei punti in cui $2x^2 - x - 1 \geq 0$. Essendo $2x^2 - x - 1 = 0$ per $x = -1/2$ oppure $x = 1$, si deduce che

$$\Omega = (-\infty, -1/2] \cup [1, +\infty).$$

La funzione non presenta simmetrie o periodicità.

(b) E' facile osservare che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-1/2} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = 0$. Per quanto riguarda l'asintoto per $x \to +\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - x - 1}}{x} = \sqrt{2}$$

e razionalizzando,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) - \sqrt{2}x &= \lim_{x\to\infty} \sqrt{2x^2 - x - 1} - \sqrt{2}x \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{2x^2 - x - 1} - \sqrt{2}x)(\sqrt{2x^2 - x - 1} + \sqrt{2}x)}{\sqrt{2x^2 - x - 1} + \sqrt{2}x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x - 1}{\sqrt{2x^2 - x - 1} + \sqrt{2}x}
\end{aligned}$$

Visto che per $x \to +\infty$ si ha che $\sqrt{2x^2-x-1}+\sqrt{2}x \sim 2\sqrt{2}x$, concludiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-x-1}{\sqrt{2x^2-x-1}+\sqrt{2}x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x-1}{2\sqrt{2}x} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

e quindi $x \to \infty$, la retta $y = \sqrt{2}x - \frac{1}{2\sqrt{2}}$ è asintoto obliquo.

Per quanto riguarda l'asintoto per $x \to -\infty$,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x)/x &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2-x-1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2-x-1}}{-\sqrt{x^2}} \\
&= -\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{2x^2-x-1}{x^2}} = -\sqrt{2}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Osserviamo che, posto $t = -x$ e razionalizzando,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x)+\sqrt{2}x &= \lim_{x\to-\infty} \sqrt{2x^2-x-1}+\sqrt{2}x = \lim_{t\to+\infty} \sqrt{2t^2+t-1}-\sqrt{2}t \\
&= \lim_{t\to+\infty} \frac{(\sqrt{2t^2+t-1}-\sqrt{2}t)(\sqrt{2t^2+t-1}+\sqrt{2}t)}{\sqrt{2t^2+t-1}+\sqrt{2}t} \\
&= \lim_{t\to+\infty} \frac{2t^2+t-1-2t^2}{\sqrt{2t^2+t-1}+\sqrt{2}t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t-1}{\sqrt{2t^2+t-1}+\sqrt{2}t}
\end{aligned}$$

Poichè , per $t \to +\infty$, $\sqrt{2t^2+t-1}+\sqrt{2}t \sim 2\sqrt{2}t$, abbiamo che

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t-1}{\sqrt{2t^2+t-1}+\sqrt{2}t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t-1}{2\sqrt{2}t} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Quindi per $x \to -\infty$, la retta $y = -\sqrt{2}x + \frac{1}{2\sqrt{2}}$ è asintoto obliquo.

(b) La funzione è continua nel dominio. Nei punti $x = -1/2$ e $x = 1$, non ha senso parlare di derivata visto che la funzione non è definita in $(-1/2, 1)$.

Ricordando la derivata di una funzione composta, abbiamo facilmente

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{4x-1}{\sqrt{2x^2-x-1}}$$

e quindi $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq 1/4$. Osservato che $1/4$ non appartiene al dominio, ne consegue che la funzione è strettamente decrescente in $(-\infty, -1/2]$ e crescente in $[1, +\infty)$. Visto che $f(1) = f(-1/2) = 0$ entrambi sono minimi assoluti. Non esistono massimi locali o assoluti.

Osserviamo inoltre che

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2} \frac{4x-1}{\sqrt{2x^2-x-1}} = \frac{1}{2} \frac{4}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

e posto $t = -x$, essendo $\sqrt{2t^2+t-1} \sim \sqrt{2}t$ per $t \to +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2} \frac{4x-1}{\sqrt{2x^2-x-1}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2} \frac{-4t-1}{\sqrt{2t^2+t-1}} = -\sqrt{2}. \tag{2}$$

(d) Per il grafico si veda la figura.

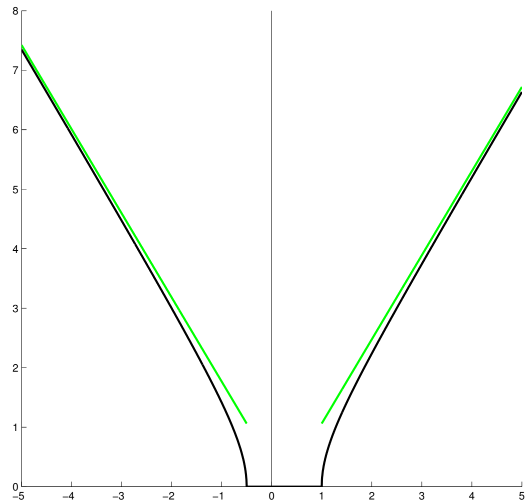


Figura 1: Grafico di $f$ in $(-5,-1/2)\cup(1,5)$ (in blu) e asintoti (in verde).

(facoltativo) Essendo

$$f'(x)=\frac{1}{2}\frac{4x-1}{\sqrt{2x^2-x-1}}$$

dalla formula della derivata di una funzione composta e di una funzione fratta

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{1}{2}\frac{4\sqrt{2x^2-x-1}-(4x-1)\frac{1}{2}\frac{4x-1}{\sqrt{2x^2-x-1}}}{(2x^2-x-1)^2}\\
&= \frac{1}{2}\frac{4(2x^2-x-1)-(4x-1)\frac{1}{2}(4x-1)}{(2x^2-x-1)^{3/2}}\\
&= \frac{1}{4}\frac{8(2x^2-x-1)-(4x-1)^2}{(2x^2-x-1)^{3/2}}=\frac{1}{4}\frac{16x^2-8x-8-16x^2-1+8x}{(2x^2-x-1)^{3/2}}\\
&= =\frac{-9}{4\cdot(2x^2-x-1)^{3/2}} \qquad (3)
\end{aligned}$$

Quindi $f''(x)\le 0$ e la funzione è ovunque concava.

**Esercizio 2** (8 punti)

1. Calcolare al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$ il limite

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(1-\cos 3x)\sin^2 x}{x^\alpha\tan(2x)}.$$

2. Dire per quali valori del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$, l'integrale

$$\int_0^{1/2}\frac{(1-\cos 3x)\sin^2 x}{x^\alpha\tan(2x)}\,dx$$

converge.

**Svolgimento**

(1) Ricordato che per $x \to 0$

$$\cos(x) \sim 1 - x^2/2$$
$$\sin(x) \sim x$$
$$\tan(x) \sim x$$

abbiamo che

$$1 - \cos(3x) \sim (3x)^2/2 = 9x^2/4$$
$$\sin^2(x) \sim x^2$$
$$\tan(2x) \sim 2x$$

e quindi

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1-\cos 3x)\sin^2 x}{x^\alpha \tan(2x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(9x^2/2)x^2}{x^\alpha \cdot 2x} = \frac{9}{4} \lim_{x\to 0^+} x^{3-\alpha}.$$

Di conseguenza

- se $\alpha < 3$ allora $L = 0$,
- se $\alpha = 3$ allora $L = 9/4$,
- se $\alpha > 3$ allora $L = +\infty$.

(2) L'integranda $f$ è asintotica in 0, unico punto di possibile discontinuità , a $\frac{9}{4}x^{3-\alpha}$. Di conseguenza, poichè $x^k$ è integrabile in $(0,1)$ per $k > -1$, l'integrale converge quando $3-\alpha > -1$ cioè $\alpha < 4$.

**Esercizio 3** (8 punti)

1. Calcolare le primitive di $f(x) = (x^2+3)e^{-x}$.
2. Calcolare l'area della regione del piano compresa tra l'asse delle $x$ e il grafico di $f(x) = (x^2+3)e^{-x}$, quando $x \in [0,1]$.

**Svolgimento**

(1) Utilizziamo più volte la tecnica di integrazione per parti, ciè $\int f\prime(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g\prime(x)dx$. Ponendo $f(x) = -e^{-x}$, $g(x) = x^2 - 3$, abbiamo

$$\begin{aligned}\int (x^2+3)e^{-x}dx &= -e^{-x}(x^2+3) - \int 2x(-e^{-x})dx \\ &= -e^{-x}(x^2+3) + 2\int xe^{-x}dx\end{aligned}$$

Osserviamo ora che similmente, posto $f(x) = -e^{-x}$, $g(x) = x$,

$$\begin{aligned}\int xe^{-x}dx &= -e^{-x}x - \int(-e^{-x})dx \\ &= -e^{-x}x + \int e^{-x}dx = -e^{-x}x - e^{-x} \qquad (4)\end{aligned}$$

e quindi

$$
\begin{aligned}
\int (x^2+3)e^{-x}dx &= -e^{-x}(x^2+3) + 2\int xe^{-x}dx = -e^{-x}(x^2+3) + 2(-e^{-x}x - e^{-x}) + C \\
&= e^{-x}(-x^2-3-2x-2) + C = e^{-x}(-x^2-2x-5) + C \\
&= -e^{-x}(x^2+2x+5) + C
\end{aligned}
$$

(2) L'area richiesta è

$$\int_0^1 (x^2+3)e^{-x}dx.$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, visto che le primitive dell'integranda sono $-e^{-x}(x^2+2x+5)+C$, ricaviamo

$$\int_0^1 (x^2+3)e^{-x}dx = -e^{-1}(1^2+2\cdot 1+5) + e^0(0^2+2\cdot 0+5) = -8e^{-1}+5.$$

**Esercizio 4** (8 punti)

1. Determinare i punti critici della funzione $f(x,y) = e^{-x}(2x - y^2)$ e discuterne la natura.
2. Dire se esistono il massimo e il minimo assoluto di $f(x,y)$ vincolati alla curva $g(x,y) = y + 2x = 0$ con $x \in [-1,1]$ e in caso affermativo calcolarli.

**Svolgimento**

Osserviamo che

- $f_x(x,y) = -e^{-x}(2x-y^2) + 2e^{-x} = e^{-x}(2-2x+y^2)$;
- $f_y(x,y) = -2ye^{-x}$;

e quindi

$$\text{grad} f(x,y) = (e^{-x}(2-2x+y^2), -2ye^{-x}) = (0,0)$$

se e solo se, essendo $e^{-x} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} 2-2x+y^2 = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} l$$

ovvero, con facili calcoli, esclusivamente in $P = (1,0)$

Da

- $f_{xx}(x,y) = -e^{-x}(2-2x-y^2) + e^{-x}(-2) = \ldots = e^{-x}(-4+2x+y^2)$;
- $f_{xy}(x,y) = 2ye^{-x}$;
- $f_{yx}(x,y) = 2ye^{-x}$;
- $f_{yy}(x,y) = -2e^{-x}$;

abbiamo

- $f_{xx}(1,0) = -e^{-1}(2-2\cdot 1-0^2)+e^{-1}(-2) = \ldots = -2e^{-1}$;
- $f_{xy}(1,0) = 0$;
- $f_{yx}(1,0) = 0$;
- $f_{yy}(1,0) = -2e^{-1}$;

e quindi la matrice Hessiana di $f$ in $(1,0)$ è

$$Hf(1,0) = \begin{pmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -2e^{-1} \end{pmatrix}$$

che è definita negativa, in quanto $-2e^{-1} < 0$ e

$$\det(Hf(1,0)) = (-2e^{-1})\cdot(-2e^{-1}) - 0\cdot 0 = 4e^{-2} > 0.$$

Di conseguenza il punto $P = (1,0)$ è l'unico massimo relativo.

(b) Il vincolo $g(x,y) = y+2x = 0$, $x \in [-1,1]$ è soddisfatto da tutti i punti $(x,-2x)$ con $x \in [-1,1]$. Osserviamo che per tali punti

$$f(x,-2x) = e^{-x}(2x-(-2x)^2) = e^{-x}(2x-4x^2)$$

e quindi per risolvere quanto richiesto basta studiare gli estremi di

$$F(x) = e^{-x}(2x-4x^2) \qquad x \in [-1,1].$$

Essendo

$$F'(x) = -e^{-x}(2x-4x^2)+e^{-x}(2-8x) = e^{-x}(2-8x-2x+4x^2) = e^{-x}(4x^2-10x+2)$$

per determinare tali punti basta studiare quando $4x^2-10x+2 > 0$ ovvero $2x^2-5x+1 > 0$. Visto che $2x^2-5x+1 = 0$ solo in $x_0 = (5-\sqrt{17})/4 \approx 0.22$ e $x_1 = (5+\sqrt{17})/4 \approx 2.28$, abbiamo che $F'(x) > 0$ per $x \in [-1,(5-\sqrt{17})/4]$ e di conseguenza $x_0 = (5-\sqrt{17})/4$ è un massimo per $F$ mentre il minimo globale di $F$ si ha in $-1$ o $1$.

Così al momento sappiamo che $Q_1 = (x_0,-2x_0)$, con $x_0 = (5-\sqrt{17})/2$ è un massimo vincolato per $f$ (sulla curva $y+2x = 0$ in cui $x \in [-1,1]$) ed è $f(x_0) \approx 0.19774$.

Visto che $F(x) = e^{-x}(2x-4x^2)$

- $F(-1) = e^1(-2-4) = -6\cdot e^1 \approx -16.310$,
- $F(1) = e^{-1}(2-4) = -2e^{-1} \approx -0.73576$,

il punto $-1$ è di minimo globale per $F$ e di conseguenza $Q_2 = (-1,2)$ è un minimo vincolato per $f$ (sulla curva $y+2x = 0$ in cui $x \in [-1,1]$).

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende esclusi i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.

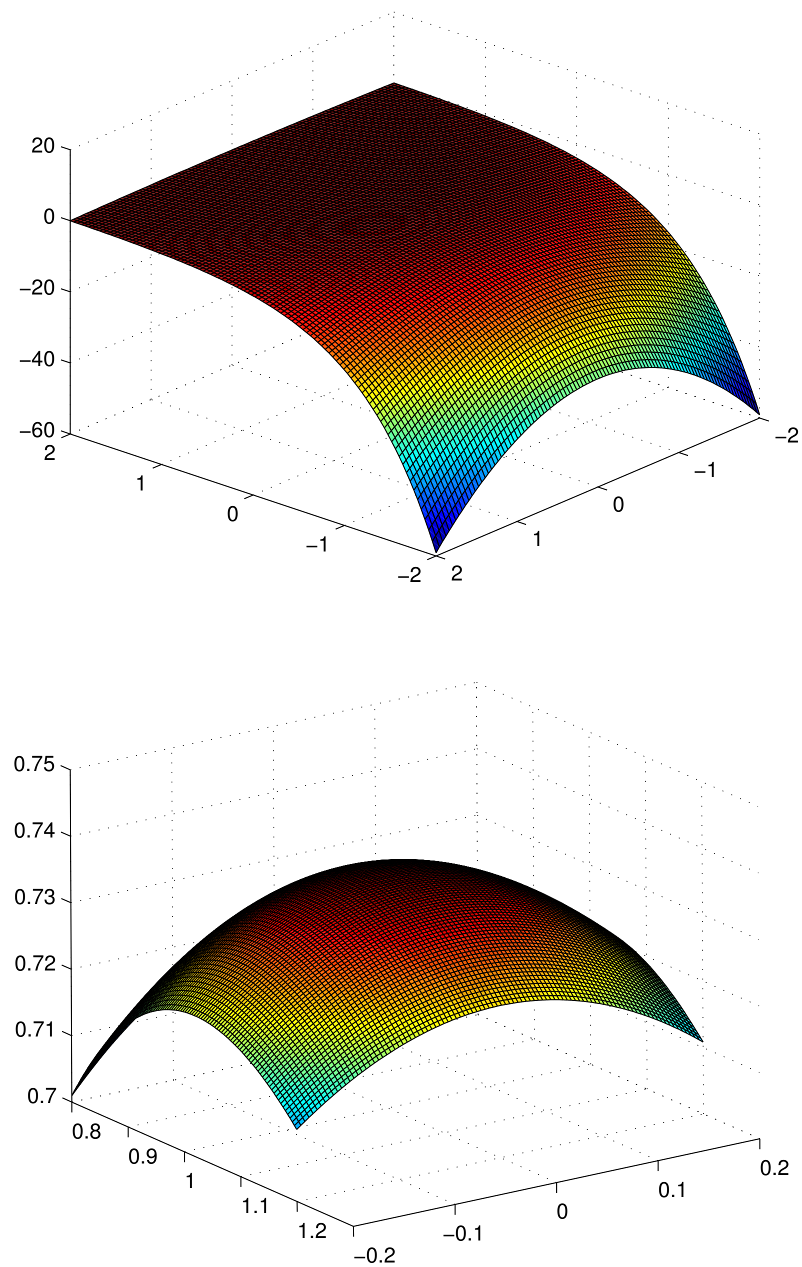


Figura 2: Grafico di $f$ in $[-2, 2] \times [-2, 2]$ e in un intorno di $(1, 0)$.

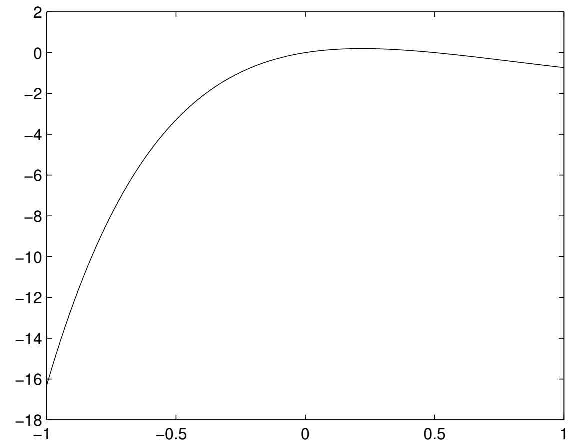


Figura 3: Grafico di $F$ in $[-1, 1]$.

# ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

**Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2016-2017**

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

20 febbraio 2017

## TEMA 2

IAM: es 1, 2, 3, 4. IAM1, v.o.: es 1, 2. IAM2, v.o.: es 3, 4.

**Esercizio 1** (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + x - 1}$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di $f$;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, l'asintoto di $f$ per $x \to +\infty$ (non è richiesto l'asintoto di $f$ per $x \to -\infty$), eventuali punti in cui è possibile prolungare $f$ per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di $f$, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di $f$; calcolare i limiti di $f'$ se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di $f$.

**Facoltativo:** Calcolare la derivata seconda di $f$ e determinare gli intervalli di concavità e convessità con eventuali punti di flesso.

**Esercizio 2** (8 punti)

1. Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^\alpha \log(1 + 3x)}{(1 - e^{2x}) \sin^2 x}.$$

2. Dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integrale

$$\int_0^{1/2} \frac{x^\alpha \log(1+3x)}{(1-e^{2x})\sin^2 x}\,dx$$

converge.

**Esercizio 3** (8 punti)

1. Calcolare le primitive di $f(x) = (1+x^2)\cos x$.
2. Calcolare l'area della regione del piano compresa tra l'asse delle $x$ e il grafico di $f(x) = (1+x^2)\cos x$, quando $x \in [0, \pi/2]$.

**Esercizio 4** (8 punti)

1. Determinare i punti critici della funzione $f(x,y) = e^{-y}(2y - x^2)$ e discuterne la natura.
2. Dire se esistono il massimo e il minimo assoluto di $f(x,y)$ vincolati alla curva $g(x,y) = y + x = 0$ con $x \in [0,1]$ e in caso affermativo calcolarli.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende esclusi i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.