ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2017-2018

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

17 settembre 2018

TEMA 1

IAM: es 1, 2, 3, 4. IAM1, v.o.: es 1, 2. IAM2, v.o.: es 3, 4.

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan(\sqrt{x}) + x.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi;

(e) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento.

(a) Il dominio Ω è $\{x \geq 0\}$ e quindi non ci sono particolari simmetrie. La funzione è sempre non negativa perché somma di due funzioni nonnegative (perchè $x \geq 0$), quindi si annulla esclusivamente in $x = 0$.

(b) Si verifica facilmente che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0.$$

Inoltre dalla limitatezza di $\arctan(\sqrt{x})$ abbiamo che

$$m = \lim_{x \to +\infty} f(x)/x = \lim_{x \to +\infty} \frac{\arctan(\sqrt{x}) + x}{x} = 1$$

$$q = \lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to +\infty} \arctan(\sqrt{x}) = \pi/2$$

e quindi si ha un asintoto obliquo $y = x + \pi/2$ per $x \to +\infty$.

(c) Si vede subito che la funzione è crescente (essendolo la composizione di crescenti e la somma di funzioni crescenti). D'altro canto

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1$$

è sempre positiva per $x > 0$. Inoltre

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1+|x|} \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 = +\infty$$

e quindi si ha una cuspide in 0.

(d) Per il grafico si veda la Figura 1.

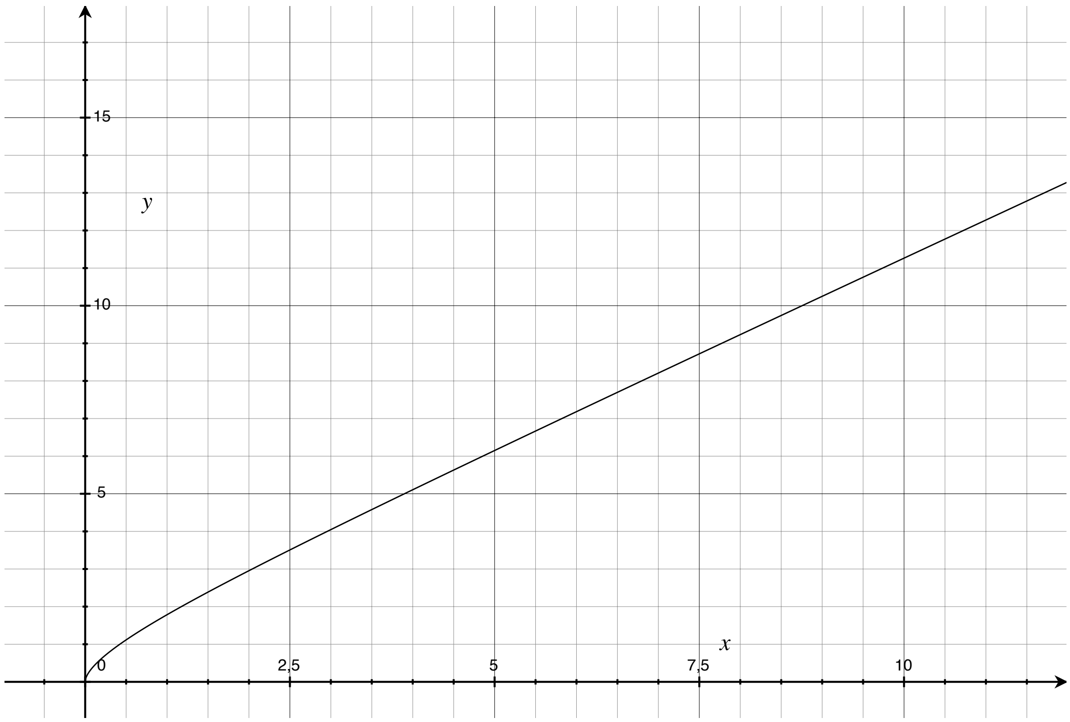

Figure 1: Grafico di f.

Esercizio 2 (8 punti) Calcolare al variare del valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}.$$

Svolgimento.

(a) Dopo aver razionalizzato, otteniamo

$$\begin{aligned} L = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(1+x)-(1-x)} = 2\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha}{x} = \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$L = 0, \text{ se } \alpha > 1,$$
$$L = 1, \text{ se } \alpha = 1,$$
$$L = +\infty, \text{ se } \alpha < 1.$$

Esercizio 3 (8 punti)

1. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{2\sin x}{3+\cos^2 x}\, dx.$$

2. Calcolare l'area della regione compresa tra l'asse delle x e il grafico di $f(x) = \frac{2\sin x}{3+\cos^2 x}$ quando $x \in [0, \pi/4]$.

Svolgimento.

(a) Posto $t = \cos(x)$ abbiamo $dt = -\sin(x)dx$ e quindi

$$I = \int \frac{2\sin x}{3+\cos^2 x}\ dx = -\int \frac{2}{3+t^2}\ dt = -\frac{2}{3}\int \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}\ dt$$

Posto $s = t/\sqrt{3}$, abbiamo

$$I = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{1}{1+s^2}ds = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan(s)+C = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan(t/\sqrt{3})+C = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan(\cos(x)/\sqrt{3})+C.$$

(b) Poich'e $f(x) \geq 0$ in $[0, \pi/4]$, l'esercizio corrisponde a calcolare

$$I^* = \int_0^{\pi/4} \frac{2\sin x}{3+\cos^2 x}\ dx.$$

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale otteniamo

$$I^* = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan(\cos(\pi/4)/\sqrt{3}) - (-\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan(\cos(0)/\sqrt{3})) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}(\arctan(\frac{1}{\sqrt{6}}) - \arctan(\frac{1}{\sqrt{3}})).$$

Esercizio 4 (8 punti)
Studiare, usando il criterio del confronto asintotico, il carattere della serie al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)^{\alpha}.$$

Svolgimento.

Osserviamo che per $n \to +\infty$, in virtù dello sviluppo di $\sin(x)$ per $x \to 0$, si ha

$$\frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3}\right) = \frac{1}{6n^3}.$$

Di conseguenza il comportamento della serie in questione é analogo a quello di

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{6n^3}\right)^{\alpha}.$$

ovvero di

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{3\alpha}}.$$

e quindi converge per $3\alpha > 1$, ovvero $\alpha > 1/3$ e diverge altrimenti.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.