ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2016-2017

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

31 gennaio 2018

TEMA 1

IAM: es 1, 2, 3, 4. IAM1, v.o.: es 1, 2. IAM2, v.o.: es 3, 4.

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{(x-1)^2}\right)$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui e' possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi.

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Facoltativo: Dalle informazioni trovate sopra dedurre la regolarità e il grafico di $g(x) = \arctan(\frac{|x|}{(x-1)^2})$. *Svolgimento.*

(a) Ricordiamo che la funzione arctan ha per dominio $\mathbb{R}$ ed è a valori in $(-\pi/2, \pi/2)$. Inoltre la funzione arctan è infinitamente derivabile, dispari e crescente. In particolare è positiva per $x > 0$, nulla in $x = 0$ e negativa per $x < 0$.

Il dominio di f corrisponde al dominio di $\frac{x}{(x-1)^2}$, ovvero $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. La funzione f non è periodica e non ha particolari simmetrie.

Dal segno di arctan, deduciamo che la funzione è positiva quando $\frac{x}{(x-1)^2} > 0$ ovvero per ogni $x > 0$ e $x \neq 1$.

(b) Si vede facilmente che

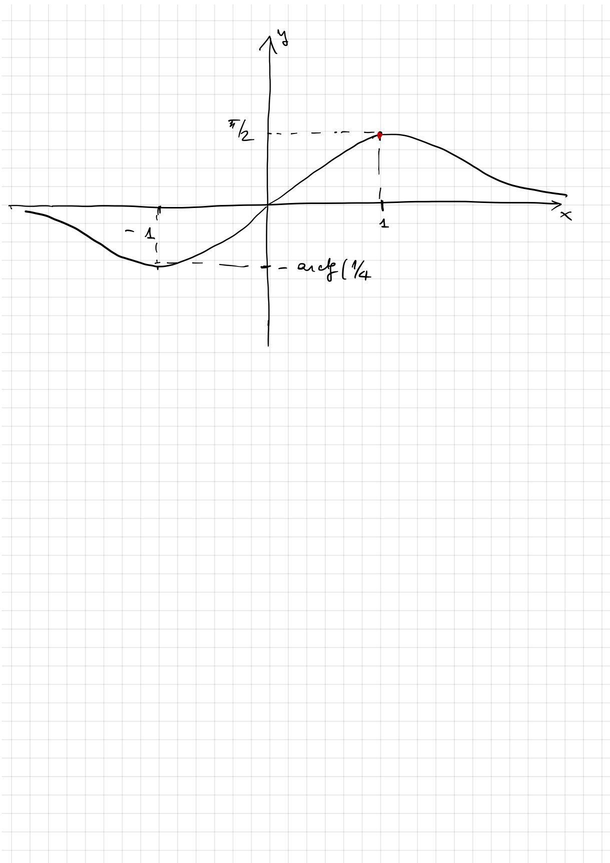
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \pi/2.$$

Quindi la funzione è prolungabile per continuità in $x = 1$ ponendo $f(1) = \pi/2$.

Inoltre, essendo $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{(x-1)^2} = 0$, deduciamo che $\lim_{x\to\pm\infty} \arctan(\frac{x}{(x-1)^2}) = 0$ e quindi la funzione a $-\infty$ e $+\infty$ ha due asintoti orizzontali, entrambi uguali alla retta $y = 0$.

(c) Come anticipato nel punto precedente la funzione è prolungabile per continuità in $x = 1$ quindi la prolungata è continua in tutto $\mathbb{R}$. Per quanto concerne la derivabilità, ricordato che $D\arctan(y) = 1/(y^2+1)$ e visto che

$$D\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 2x(x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{x+1}{(x-1)^3} \tag{1}$$



ricaviamo

$$f'(x) = \frac{1}{\left(\frac{x}{(x-1)^2}\right)^2 + 1} \cdot D\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^4}{x^2+(x-1)^4} \cdot \left(-\frac{x+1}{(x-1)^3}\right) = \frac{1-x^2}{x^2+(x-1)^4}.$$

Di conseguenza è derivabile in $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. Si vede facilmente che $\lim_{x\to 1} f'(x) = 0$, e quindi si può prolungare f' in $x = 1$ e $f'(1) = 0$. Osserviamo inoltre che il segno di $f'(x)$ è lo stesso di $(1-x^2)$, e quindi dallo studio della disequazione $1 - x^2 > 0$ deduciamo che $f'(x) > 0$ in $(-1, 1)$ mentre è $f'(x) < 0$ per $x < -1$, $f'(-1) = 0$ e $f'(x) < 0$ in $(1, +\infty)$. Di conseguenza, dallo studio delle derivate, ricaviamo che la funzione f è decrescente in $(-\infty, -1)$ e $(1, +\infty)$, crescente in $(-1, 1)$, e inoltre ha un minimo locale (ma anche globale) in $x = -1$ e un massimo locale (ma anche globale) in $x = 1$.

(d) Per il grafico si veda la Figura.

Facoltativo: La funzione g concide con f per $x \geq 0$ e con $-f$ per $x \leq 0$. Dunque per $x \neq 0$, g ha la stessa regolaritá di f: g é continua e derivabile in ogni $x \neq 0$. In $x = 0$ osserviamo che la funzione é continua, inoltre $g'_+(0) = f'(0) = 1$, mentre $g'_-(0) = -f'(0) = -1$. Dunque in $x = 0$ la funzione non é derivabile e ha un punto angoloso. Infine il grafico di g si ottiene disegnando il grafico di f per $x \geq 0$ e disegnando il simmetrico del grafico di f rispetto all'asse delle x per $x \leq 0$.

Esercizio 2 (8 punti) Calcolare, al variare del parametro $\alpha > 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2} - e^{x^3}}{x^\alpha - \log(1+x)}.$$

Svolgimento.

Studiamo per prima cosa il numeratore $e^{x^2}-e^{x^3}$. Dalla formula di Mac Laurin $e^y = 1+y+o(y)$ se $y \to 0$, quindi

$$e^{x^2} - e^{x^3} = (1 + x^2 + o(x^2)) - (1 + x^3 + o(x^3)) = x^2 + o(x^2),\ x \to 0.$$

Per quanto riguarda il denominatore, dalla formula di Mac Laurin $\log(1+y) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Di conseguenza

$$x^\alpha - \log(1 + x) = x^\alpha - (x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)).$$

Così,

- per $\alpha \in (0, 1)$, abbiamo
$$x^\alpha - \log(1 + x) = x^\alpha + o(x^\alpha).$$
e quindi
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2} - e^{x^3}}{x^\alpha - \log(1 + x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x^\alpha} = 0.$$
- per $\alpha = 1$, abbiamo
$$x^\alpha - \log(1 + x) = x - (x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) = \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$
e quindi
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2} - e^{x^3}}{x^\alpha - \log(1 + x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{\frac{x^2}{2}} = 2.$$
- per $\alpha \in (1, +\infty)$, abbiamo
$$x^\alpha - \log(1 + x) = x + o(x).$$
e quindi
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2} - e^{x^3}}{x^\alpha - \log(1 + x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x} = 0.$$

Esercizio 3 (8 punti) a) Calcolare l'integrale

$$\int_1^4 \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx.$$

b) Dire se l'integrale improprio

$$\int_0^4 \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx$$

converge e in caso affermativo calcolarlo.
Facoltativo: Dire per quali $\alpha > 0$ l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha + \sqrt{x}} dx$ converge

Svolgimento.

(a) Posto $t = \sqrt{x}$ abbiamo $x = t^2$ da cui $dx = 2tdt$. Sostituendo,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx &= \int \frac{2t}{t^2+t}dt = 2\int \frac{1}{1+t} = 2\log(|1+t|) + C \\ &= 2\log(1+\sqrt{x}) + C. \qquad (2)\end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx = 2\log(1+\sqrt{4}) - 2\log(1+\sqrt{1}) = 2\left(\log(3) - \log(2)\right) = \log(9) - \log(4).$$

(b) La funzione $\frac{1}{x+\sqrt{x}}$ è illimitata in $(0,4]$. Sono verificate le ipotesi del teorema del confronto asintotico, perché $\frac{1}{x+\sqrt{x}} \geq 0$ in $(0,4]$. Inoltre $x+\sqrt{x} = \sqrt{x} + o(\sqrt{x})$ se $x \to 0^+$. Quindi $\frac{1}{x+\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ che è integrabile in $(0,1)$ e quindi anche in $(0,4)$. Per definizione di integrale generalizzato: $\int_0^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx = \log 9 - \lim_{x\to 0^+} 2\log(|1+\sqrt{x}|) = \log 9 - 0 = \log 9$.

Facoltativo: Osserviamo che sono verificate le ipotesi del teorema del confronto asintotico, perché $\frac{1}{x^\alpha+\sqrt{x}} \geq 0$ in $[1,+\infty)$. Inoltre se $\alpha < \frac{1}{2}$, si ha che $x^\alpha + \sqrt{x} = \sqrt{x} + o(\sqrt{x})$ se $x \to +\infty$ e se $\alpha = \frac{1}{2}$, $x^\alpha + \sqrt{x} = 2\sqrt{x}$, e dunque per $\alpha \leq \frac{1}{2}$, si ha che $\frac{1}{x+\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ che non è integrabile in $[1,+\infty)$. Se invece $\alpha > \frac{1}{2}$, si ha che $x^\alpha + \sqrt{x} = x^\alpha + o(x^\alpha)$ se $x \to +\infty$ e dunque per $\alpha > \frac{1}{2}$, si ha che $\frac{1}{x+\sqrt{x}} \sim \frac{1}{x^\alpha}$ che è integrabile in $[1,+\infty)$ se e solo se $\alpha > 1$. In conclusione la funzione é integrabile se e solo se $\alpha > 1$.

Esercizio 4 (8 punti)
Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{9^n}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}.$$

Svolgimento. Osserviamo che è una serie a termini positivi. Applicando il criterio della radice, si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{9^n}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}\right)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{9}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \frac{e^2}{9} < 1$$

e quindi deduciamo che la serie è convergente.