ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, a.a. 2018-2019

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

20 febbraio 2019

TEMA 1

IAM: es 1, 2, 3, 4. IAM1, v.o.: es 1, 2. IAM2, v.o.: es 2b), 3, 4.

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{(x-1)(x-3)}.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi.

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Svolgimento .

a) La funzione è ben definita su tutti i numeri reali x per cui non si annulla il denominatore, cioé per $x \in \mathbb{R}$ tali che $x \neq 1, 3$. Dunque il dominio della funzione è dato dall'insieme

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1, x \neq 3\} = (-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty).$$

Dato che $e^x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha che $f(x) > 0$ se e solo se $(x-1)(x-3) > 0$, cioé se e solo se $x > 3$ oppure $x < 1$. Quindi $f(x) > 0$ su $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ e $f(x) < 0$ su $(1, 3)$. La funzione non si annulla mai.

La funzione non presenta simmetrie né periodicità.

b) Calcoliamo i limiti in $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{e^x}{(x-1)(x-3)} = \frac{e^1}{(-2)} \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)} = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{e^x}{(x-1)(x-3)} = \frac{e}{(-2)} \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)} = +\infty.$$

Analogamente calcoliamo i limiti in $x = 3$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{e^x}{(x-1)(x-3)} = \frac{e^3}{2} \lim_{x\to 3^+} \frac{1}{(x-3)} = +\infty \qquad \lim_{x\to 3^-} \frac{e^x}{(x-1)(x-3)} = \frac{e^3}{2} \lim_{x\to 3^-} \frac{1}{(x-3)} = -\infty.$$

Dunque le rette $x = 1$ e $x = 3$ sono asintoti verticali per il grafico della funzione.

Calcoliamo il limite a $+\infty$. Per il confronto degli infiniti (tra infinito esponenziale e polinomiale) si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2(1-1/x)(1-3/x)} = +\infty.$$

Dunque la funzione non ha asintoti orizzontali a $+\infty$. Controlliamo se ha un asintoto obliquo. Per il confronto tra infiniti ho che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x(x-1)(x-3)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3(1-1/x)(1-3/x)} = +\infty.$$

dunque la funzione non ha asintoti obliqui a $+\infty$. Calcoliamo il limite a $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^2(1-1/x)(1-3/x)} = 0.$$

Dunque $y = 0$ è asintoto orizzontale a $-\infty$.
c) La funzione è continua sul suo dominio in quanto composizione di funzioni continue.

Calcoliamo la derivata. Osserviamo che $f(x) = \frac{e^x}{x^2-4x+3}$.

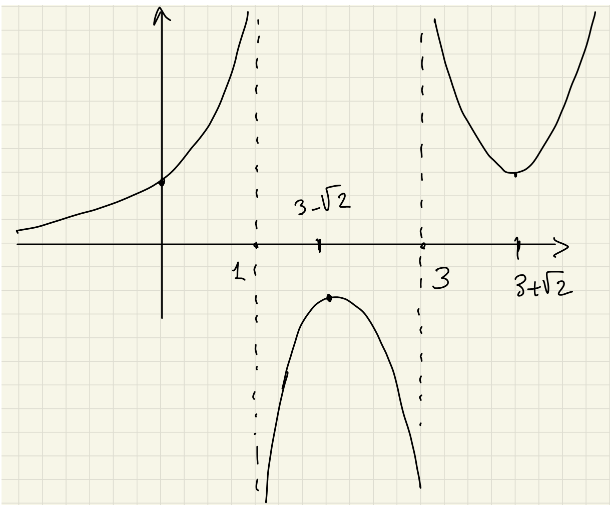
$$f'(x) = \frac{e^x(x^2-4x+3) - e^x(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2} = \frac{e^x(x^2-6x+7)}{(x^2-4x+3)^2}.$$

La derivata è ben definita su tutti i punti $x \in \mathbb{R}$ tali che $x \neq 1, 3$. Dunque f è derivabile nel suo dominio.

Studio il segno della derivata. Si ha che $f'(x) > 0$ se e solo se $x^2 - 6x + 7 > 0$, dato che $e^x > 0$ e $(x^2 - 4x + 3)^2 > 0$. Osserviamo che

$$x^2 - 6x + 7 > 0 \text{ se e solo se } x > 3 + \sqrt{2} \text{ oppure } x < 3 - \sqrt{2}.$$

Osserviamo che $1 < 3 - \sqrt{2} < 3$, mentre $3 + \sqrt{2} > 3$. Per il criterio di monotonia, f è crescente su $(-\infty, 1) \cup (1, 3 - \sqrt{2}) \cup (3 + \sqrt{2}, +\infty)$ e decrescente altrove. Il punto $x = 3 - \sqrt{2}$ è un punto di massimo locale mentre il punto $x = 3 + \sqrt{2}$ è un punto di minimo locale. La funzione non ha punti di massimo o minimo assoluti, dato che assume tutti i valori compresi tra $-\infty$ e $+\infty$.
d) Per il grafico vedere la figura.



Esercizio 2 (8 punti)
a) Studiare al variare di $\alpha > 0$ il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha \left[\tan(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}\right]}{5n^2 + 2n}.$$

b) Studiare al variare di $\alpha > 0$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^\alpha \left[\tan(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}\right]}{5n^2 + 2n}.$$

Svolgimento .
a) Utilizzando il polinomio di Taylor di $\tan x$ per $x \to 0$, otteniamo che $\tan(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + o(\frac{1}{n^3})$. Dunque sostituendo otteniamo

$$\frac{n^\alpha \left[\tan(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}\right]}{5n^2 + 2n} = \frac{n^\alpha \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + o(\frac{1}{n^3}) - \frac{1}{n}\right)}{n^2 \left(5 + \frac{2}{n}\right)} = \frac{n^{\alpha-3} \left(\frac{1}{3} + o(1)\right)}{n^2 \left(5 + \frac{2}{n}\right)} = \frac{1}{n^{5-\alpha}} \cdot \frac{\frac{1}{3} + o(1)}{5 + \frac{2}{n}}.$$

Dunque otteniamo

- se $\alpha < 5$, cioè se $5 - \alpha > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha \left[\tan(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}\right]}{5n^2 + 2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{5-\alpha}} \cdot \frac{\frac{1}{3} + o(1)}{5 + \frac{2}{n}} = 0,$$

- se $\alpha = 5$, cioè se $5 - \alpha = 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha \left[\tan(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}\right]}{5n^2 + 2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{3} + o(1)}{5 + \frac{2}{n}} = \frac{1}{15},$$

- se $\alpha > 5$, cioè se $5 - \alpha < 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha \left[\tan(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}\right]}{5n^2 + 2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{5-\alpha}} \cdot \frac{\frac{1}{3} + o(1)}{5 + \frac{2}{n}} = +\infty.$$

b) Notiamo che la serie è una serie a termini positivi dato che $\tan x \geq x$ per $x \in [0, \pi/2)$, e dunque $\tan\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \geq 0$, mentre $5n^2 + 2n > 0$. Dal punto precedente abbiamo che

$$\frac{n^\alpha \left[\tan(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}\right]}{5n^2 + 2n} \sim \frac{1}{n^{5-\alpha}}.$$

Dunque per il criterio del confronto asintotico la serie converge se $5 - \alpha > 1$, cioé se $\alpha < 4$, mentre diverge a $+\infty$ se $5 - \alpha \leq 1$, cioé se $\alpha \geq 4$.

Esercizio 3 (8 punti)
Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \, \sqrt{3 \cos x} \, dx.$$

Svolgimento .
Calcoliamo la primitiva di $\sin x \, \sqrt{3 \cos x}$. Operiamo il cambio di variabile $y = \cos x$ e otteniamo che $dy = -\sin x dx$, e quindi $\sin x dx = -dy$. Dunque abbiamo che

$$\int \sin x \, \sqrt{3 \cos x} dx = -\int \sqrt{3y} dy = -\sqrt{3} \int y^{\frac{1}{2}} dy = -\sqrt{3} \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} y^{1+\frac{1}{2}} + c = -\frac{2}{\sqrt{3}} (\cos x)^{\frac{3}{2}} + c.$$

Per il corollario del teorema fondamentale del calcolo integrale possiamo calcolare, ricordando che $\cos(\pi/2) = 0$ e $\cos(0) = 1$,

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \, \sqrt{3\cos x} \; dx = \left[-\frac{2}{\sqrt{3}} (\cos x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Esercizio 4 (8 punti)
Data la funzione

$$f(x, y) = \arctan(2 - x^2 - y^2),$$

determinare il dominio, scrivere l'equazione del piano tangente nel punto $(1, 1)$, calcolare la derivata direzionale di f in $(1, 1)$ lungo il vettore $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, trovare i punti critici (senza studiarne la natura).

Svolgimento .
Dominio: Dato la la funzione $\arctan x$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ il dominio della funzione f coincide con tutti i punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, quindi $D = \mathbb{R}^2$. Calcolo prima di tutto le derivate parziali di f:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{1 + (2 - x^2 - y^2)^2} \cdot (-2x) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{1 + (2 - x^2 - y^2)^2} \cdot (-2y). \end{aligned}$$

Notiamo che le derivate parziali sono continue nel dominio D dunque per il teorema del differenziale totale la funzione è differenziabile in $(1, 1)$. Calcolo il valore delle derivate parziali in $(1, 1)$ e ottengo

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) &= \frac{1}{1 + (2 - 1^2 - 1^2)^2} \cdot (-2) = -2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{1 + (2 - 1^2 - 1^2)^2} \cdot (-2) = -2. \end{aligned}$$

L'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 1)$ è data da

$$z = f(1, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y - 1).$$

Osserviamo che $f(1, 1) = \arctan(2 - 1^2 - 1^2) = \arctan 0 = 0$ e dunque l'equazione del piano tangente diventa

$$z = -2(x - 1) - 2(y - 1) \text{ o equivalentemente } \quad z = -2x - 2y + 4.$$

Per calcolare la derivata direzionale di f in $(1, 1)$ lungo il vettore $v = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ utilizzo la formula del gradiente

$$D_v f(1, 1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} = 0.$$

I punti critici di f sono gli (x,y) tali che $(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)) = (0,0)$, cioè

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{1+(2-x^2-y^2)^2} \cdot (-2x) = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{1}{1+(2-x^2-y^2)^2} \cdot (-2y) = 0,
\end{aligned}$$

da cui otteniamo che l'unico punto critico è il punto $(0,0)$.