ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, a.a. 2018-2019

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

16 settembre 2019

TEMA 1

IAM: es 1, 2, 3, 4. IAM1, v.o.: es 1, 2. IAM2, v.o.: 3, 4

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la seguente funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{e^x - 1}\right).$$

(a) Determinare il dominio, segno, eventuali simmetrie o periodicità;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi.

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Soluzione

(a) La funzione arcotangente è definita su tutto $\mathbb{R}$, quindi basta imporre che il denominatore non si annulli, cioè $e^x \neq 1$, che ha come soluzione $x \neq 0$. Dunque il dominio è $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. La funzione non è periodica né presenta simmetrie evidenti.

Notiamo inoltre che la funzione arcotangente è positiva se e solo se il suo argomento è positivo. Dunque $f(x) \geq 0$ se e solo se $\frac{1}{e^x-1} \geq 0$, che a sua volta è verificata se e solo se $e^x - 1 > 0$, che ha come soluzione $x > 0$. Dunque $f(x) > 0$ per $x > 0$, $f(x) < 0$ per $x < 0$ e f non si annulla in nessun punto.

(b) Calcoliamo i limiti all'infinito, ricordando che $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{1}{e^x - 1}\right) = \arctan(0) = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \arctan\left(\frac{1}{e^x - 1}\right) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Dunque la funzione ha come asintoto orizzontale a $+\infty$ la retta $y = 0$ e come asintoto orizzontale a $-\infty$ la retta $y = -\frac{\pi}{4}$.

Calcoliamo i limiti destri e sinistri in 0, ricordando che $\lim_{x\to\pm\infty} \arctan x = \pm\frac{\pi}{2}$.

$$\lim_{x\to0^+} \arctan\left(\frac{1}{e^x - 1}\right) = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to0^-} \arctan\left(\frac{1}{e^x - 1}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Dunque $x = 0$ è una discontinuità di salto (o di prima specie) se estendiamo la funzione in $x = 0$.

(c) La funzione è continua nel suo dominio in quanto composizione di funzioni continue.
Calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{(e^x-1)^2}} \, \frac{(-1)}{(e^x - 1)^2} \, e^x = -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2 + 1}.$$

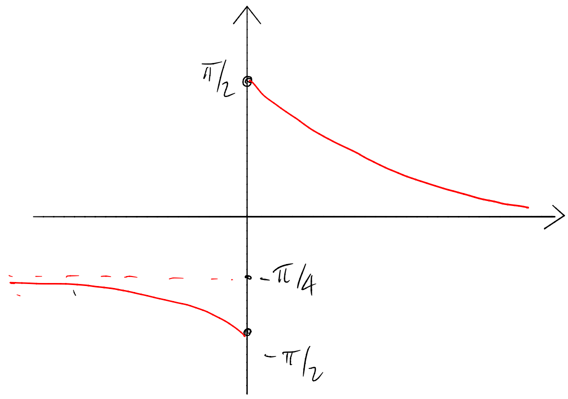
Dunque la funzione è derivabile in tutto il suo dominio.

Dato che $e^x > 0$ e $(e^x - 1)^2 + 1 > 0$ per ogni x, si ha che $f'(x) < 0$ per ogni $x \in D$. Questo implica che la funzione è monotona decrescente nel suo dominio. Non ci sono punti di estremo.

Calcoliamo il limite di f' in $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{(e^x-1)^2+1} = -1.$$

d) Per il grafico si veda la figura.



Esercizio 2 (8 punti)
Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2\log n - \cos n + 3\, e^{-2n}}{5n^2 + \sqrt{3n} - \arctan n}.$$

Soluzione
Studiamo separatamente numeratore e denominatore.

Al numeratore ho la somma di 3 termini: $2\log n$ che è un infinito, $-\cos n$ che non ha limite ma rimane limitato tra -1 e 1 per tutti i valori di n, e $3e^{-2n}$ che è infinitesimo, cioè $\lim_{n\to+\infty} 3e^{-2n} = 0$. Dunque il numeratore è un infinito, e si scrive come

$$2\log n - \cos n + 3\, e^{-2n} = \log n \left(2 - \frac{\cos n}{\log n} + \frac{3\, e^{-2n}}{\log n}\right) = \log n(2 + o(1)).$$

Al denominatore ho la somma di 3 termini: $5n^2$ che è un infinito, $\sqrt{3n}$ che è un infinito, e $-\arctan n$ che rimane limitato. Inoltre per il confronto tra infiniti ho che n^2 è di ordine maggiore rispetto a $\sqrt{n}$. Il denominatore dunque è un infinito e si scrive come

$$5n^2 + \sqrt{3n} - \arctan n = n^2\left(5 + \frac{\sqrt{3n}}{n^2} - \frac{\arctan n}{n^2}\right) = n^2(5 + o(1)).$$

Calcoliamo ora il limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2\log n - \cos n + 3\, e^{-2n}}{5n^2 + \sqrt{3n} - \arctan n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log n(2 + o(1))}{n^2(5 + o(1))} = 0,$$

perché l'infinito polinomiale n^2 è di ordine maggiore dell'infinito logaritmico $\log n$.

Esercizio 3 (8 punti)
Calcolare l'integrale
$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin(2x)}{1-\cos(2x)} dx.$$

Soluzione
Possiamo intanto fare un primo cambiamento di variabili $2x = t$, da cui formalmente $2dx = dt$. L'integrale diventa
$$\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin t}{1-\cos t} dt.$$
Con il cambiamento di variabili $1 - \cos t = y$ (da cui $\sin t dt = dy$) si ottiene:
$$\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{y} dy = \frac{1}{2}\log|y|\Big|_{y=1}^{y=2} = \frac{1}{2}\log 2.$$
Si noti che si poteva arrivare allo stesso risultato con il solo cambiamento di variabile: $1 - \cos(2x) = z$, trovando $2\sin(2x)dx = dz$.

Esercizio 4 (8 punti)
Studiare al variare di $\alpha > 0$ la convergenza semplice e assoluta della seguente serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Soluzione
Studiamo intanto la convergenza assoluta della serie, cioè di $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$. La successione
$$|a_n| = \log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right) \sim \frac{1}{n^\alpha},\ per\ n \to +\infty.$$
Quindi per il criterio del confronto asintotico $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ converge, cioè la serie converge assolutamente (e quindi converge) se e solo se $\alpha > 1$. Se $\alpha \leq 1$ la serie non converge assolutamente ma può convergere. Visto che è una serie a termini di segno alterno, usiamo il criterio di Leibniz:
a) la successione $\log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right) \to 0$ se $n \to +\infty$, per ogni $\alpha > 0$;
b) la successione $\log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)$ è decrescente: infatti la funzione $\log(x)$ è crescente e la funzione $1+\frac{1}{x^\alpha}$ è decrescente, quindi la composizione è decrescente. Quindi dal criterio di Leibniz, la serie converge per ogni $\alpha \leq 1$. Riassumento, la serie converge assolutamente (e quindi converge) per ogni $\alpha > 1$ e converge (ma non assolutamente) per ogni $\alpha \leq 1$.