ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, a.a. 2018-2019
Corsi di laurea in Scienze Statistiche

11 luglio 2019

TEMA 1

IAM: es 1, 2, 3, 4. IAM1, v.o.: es 1, 2. IAM2, v.o.: 3, 4

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la seguente funzione

$$f(x) = \arctan(x) + \log(x-1).$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità; **(NON è richiesto lo studio del segno)**

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi.

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Svolgimento

(a) La funzione $\arctan(\cdot)$ è definita su tutto $\mathbb{R}$, la funzione $\log(\cdot)$ è definita quando l'argomento è positivo. Quindi $D = \{x > 1\}$. Notiamo inoltre che non ci sono simmetrie evidenti.

(b) Facciamo i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to 1^+} \arctan(x) + \log(x-1) = \pi/4 + (-\infty) = -\infty.$$

$$\lim_{x\to +\infty} \arctan(x) + \log(x-1) = \pi/2 + \infty = +\infty.$$

Vediamo se c'è un asintoto per $x \to +\infty$: Notiamo che, per la scala degli infiniti,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x-1)}{x} = 0,$$

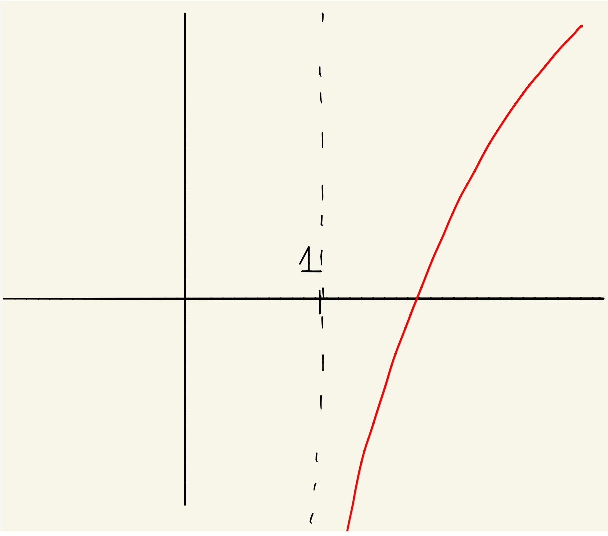
quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan(x) + \log(x-1)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\arctan(x)}{x} + \frac{\log(x-1)}{x}\right) = 0 + 0 = 0,$$

quindi non c'è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

(c) La funzione è continua nel suo dominio, e non si può estendere per continuità in $x = 1$. Calcoliamo la derivata di f:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x-1} = \frac{x-1+1+x^2}{(1+x^2)(x-1)} = \frac{x(1+x)}{(1+x^2)(x-1)}.$$



Nel dominio D, $f'(x)$ è continua, quindi la f è derivabile nel suo dominio. Considerato che la funzione è definita per $x > 1$ si deduce che $f'(x) > 0$, per ogni punto del dominio D, quindi f è strettamente crescente in D.

(e) Per il grafico vedere la figura sopra.

Esercizio 2 (8 punti)
Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha > 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - \cos x}{x - \sin x + x^\alpha}.$$

Svolgimento

Osserviamo che, dagli sviluppi di McLaurin, se $x \to 0$,

$$e^x - \cos x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) = x + o(x)$$

$$x - \sin x = x - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

quindi il limite diventa

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x + o(x)}{x^3/6 + o(x^3) + x^\alpha}.$$

Se $\alpha < 1$ il limite è uguale a

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x + o(x)}{x^\alpha + o(x^\alpha)} = 0.$$

Se $\alpha = 1$ il limite è uguale a

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x + o(x)}{x + o(x)} = 1.$$

Se $\alpha > 1$ il limite è uguale a

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x + o(x)}{x^3/6 + o(x^3) + x^\alpha} = +\infty.$$

Esercizio 3 (8 punti)
a) Calcolare l'integrale
$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+3x+2}\ dx.$$
b) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale
$$\int_1^{+\infty} \frac{2x^\alpha}{x^2+3x+2}\ dx.$$

Svolgimento
a) Osservando che $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ l' integrale si può fare con i fratti semplici nel seguente modo:
$$\frac{2x}{x^2+3x+2} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2} = \frac{(A+B)x+2A+B}{x^2+3x+2}$$
da cui si ottiene $A+B=2$, $2A+B=0$, cioè $A=-2$, $B=4$, quindi
$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+3x+2} = -\int_0^1 \frac{2}{x+1}dx + 4\int_0^1 \frac{1}{x+2}dx$$
$$= -2\log|x+1|/^{\{x=1\}}_{\{x=0\}} + 4\log|x+2|/^{\{x=1\}}_{\{x=0\}} = -2\log 2 + 4\log 3 - 4\log 2 =$$
$$-6\log 2 + 4\log 3 = \log\frac{3^4}{2^6}.$$

L' integrale si poteva anche fare nel seguente modo (ma più lungo): operiamo la sostituzione $t=x^2+3x+2$. Allora $dt=(2x+3)dx$, $t=2$ se $x=0$ e $t=6$ se $x=1$. L'integrale diventa
$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+3x+2}\ dx = \int_0^1 \frac{2x+3-3}{x^2+3x+2}\ dx = \int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+2}\ dx - 3\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}\ dx$$
Il primo integrale:
$$\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+2}\ dx = \int_2^6 \frac{1}{t}dt = \log|t|/^{\{t=6\}}_{\{t=1\}} = \log 6 - \log 2.$$
Il secondo integrale si risolve come nel primo modo: $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$, quindi usando il metodo dei fratti semplici:
$$\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2} = \frac{(A+B)x+2A+B}{x^2+3x+2}$$
da cui si ottiene $A+B=0$, $2A+B=1$, cioè $A=1$, $B=-1$, quindi
$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2} = \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx - \int_0^1 \frac{1}{x+2}dx =$$
$$\log|x+1|/^{\{x=1\}}_{\{x=0\}} - \log|x+2|/^{\{x=1\}}_{\{x=0\}} = -2\log 2 - \log 3 + \log 2 = 2\log 2 - \log 3.$$
In totale quindi l' integrale vale $\log 6 - \log 2 - 3(2\log 2 - \log 3) = 4\log 3 - 6\log 2$.
b) Osserviamo che $\frac{2x^\alpha}{x^2+3x+2} > 0$ in $(1,+\infty)$ e inoltre
$$\frac{2x^\alpha}{x^2+3x+2} = \frac{2x^\alpha}{x^2(1+3/x+2/x^2)} \sim \frac{2x^\alpha}{x^2} = \frac{2}{x^{2-\alpha}} \qquad x\to+\infty.$$

Per il principio del confronto asintotico l'integrale converge se e solo se $2-\alpha>1$, cioè se e solo se $\alpha<1$.

Esercizio 4 (8 punti)
Data la funzione
$$f(x,y)=x^3-3xy+6y^2$$
determinare i punti critici e studiarne la natura.

Svolgimento .
La funzione è definita su tutti i punti $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, dove è continua e differenziabile. Infatti le derivate parziali sono
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2-3y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-3x+12y.$$

Le derivate parziali sono continue in $\mathbb{R}^2$ dunque per il teorema del differenziale totale la funzione è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$. I punti critici di f sono gli (x,y) tali che $(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y))=(0,0)$, cioè
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=3x^2-3y=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)&=-3x+12y=0.\end{aligned}$$
Dalla seconda equazione otteniamo $x=4y$, e usando la prima equazione si ha $y(16y-1)=0$ da cui $y=0$ e quindi $x=0$ e $y=1/16$ e $x=1/4$. Quindi ci sono due punti critici: $P_1=(0,0)$, $P_2=(1/4,1/16)$.

Per studiare la natura dei punti critici dobbiamo calcolare la matrice Hessiana in tali punti.
$$f_{xx}(x,y)=6x,\ f_{xy}(x,y)=-3,\ f_{yy}(x,y)=12$$
quindi la matrice Hessiana H in un punto generico (x,y) è
$$H(x,y)=\begin{pmatrix}6x&-3\\-3&12\end{pmatrix}.$$

Quindi
$$H(0,0)=\begin{pmatrix}0&-3\\-3&12\end{pmatrix},$$
è tale che $\det H(0,0)<0$ cioè $H(0,0)$ è indefinita e quindi $P_1=(0,0)$ è un punto di sella.
$$H(1/4,1/16)=\begin{pmatrix}3/2&-3\\-3&12\end{pmatrix},$$
è tale che $\det H(1/4,1/16)=9>0$ e gli elementi sulla diagonale principale sono positivi quindi $H(1/4,1/16)$ è definita positiva e quindi $P_2=(1/4,1/16)$ è un punto di minimo relativo.