# ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

**Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci a.a. 2018-2019**

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

24 gennaio 2019

## TEMA 1

IAM: es 1, 2, 3, 4. IAM1, v.o.: es 1, 2. IAM2, v.o.: es 3, 4.

**Esercizio 1** (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan(\log|x-2|).$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di $f$;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f$, eventuali punti in cui è possibile prolungare $f$ per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di $f$, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di $f$; calcolare i limiti di $f'$ se significativi.

(d) disegnare un grafico qualitativo di $f$.

Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

**Facoltativo**: Calcolare la derivata seconda di $f$ e determinare gli intervalli di concavità/ convessità e eventuali punti di flesso.

*Svolgimento.* (a) Ricordiamo che la funzione arctan ha per dominio $\mathbb{R}$ ed è a valori in $(-\pi/2, \pi/2)$. Poiché $|x-2| \geq 0$ e la funzione log è definita se l'argomento è positivo, il dominio di f sarà $D = \{x \in \mathbb{R}, x \neq 2\}$. La funzione $f$ non è periodica e non ha particolari simmetrie. Poiché la funzione arctan è positiva per $x > 0$, nulla in $x = 0$ e negativa per $x < 0$, si ha che $f(x) > 0$ se e solo se $\log|x-2| > 0$ cioè se e solo se $|x-2| > 1$ che equivale a $x > 3$ o $x < 1$. In $x = 1$ e $x = 3$ si ha che $f(x) = 0$.

(b) Poiché $\lim_{x\to 2} \log|x-2| = -\infty$ Sia ha

$$\lim_{x\to 2} f(x) = -\pi/2.$$

Quindi la funzione è prolungabile per continuità a una funzione $\overline{f}$ in $x = 2$ ponendo $\overline{f}(2) = -\pi/2$. Poiché $\lim_{x\to\pm\infty} \log|x-2| = +\infty$, allora $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pi/2$ e quindi la funzione a $-\infty$ e $+\infty$ ha due asintoti orizzontali, entrambi uguali alla retta $y = \pi/2$.

(c) Come anticipato nel punto precedente la funzione è prolungabile per continuità in $x = 2$ quindi la prolungata è continua in tutto $\mathbb{R}$. La funzione è derivabile in ogni $x \neq 2$ perché composizione di funzioni derivabili per $x \neq 2$.

Per calcolare la derivata conviene scrivere la funzione per $x > 2$ e per $x < 2$.

Sia ha: per $x > 2$: $f(x) = \arctan(\log(x-2))$, quindi, ricordando che $D\arctan(y) = 1/(y^2+1)$. ricaviamo

$$f'(x) = \frac{1}{1+\log^2(x-2)} \cdot \frac{1}{(x-2)}.$$

Analogamante per $x < 2$: $f(x) = \arctan(\log(2-x))$, quindi

$$f'(x) = \frac{1}{1+\log^2(2-x)} \cdot \frac{1}{(2-x)}(-1) = \frac{1}{1+\log^2(2-x)} \cdot \frac{1}{(x-2)}.$$

Visto che in $x = 2$ la $f$ si può proloungare con continuità, vediamo se la prolungata è derivabile. Si ottiene

$$\lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{\log^2(x-2)+1} \cdot \frac{1}{(x-2)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{(x-2)\log^2(x-2)} \left( \frac{1}{\frac{1}{\log^2(x-2)}+1} \right) = +\infty$$

dato che $\lim_{x\to 2^+}(x-2)\log^2(x-2) = 0^+$. Analogamente

$$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{\log^2(2-x)+1} \cdot \frac{1}{(x-2)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{(x-2)\log^2(2-x)} \left( \frac{1}{\frac{1}{\log^2(2-x)}+1} \right) = -\infty$$

dato che $\lim_{x\to 2^-}(x-2)\log^2(x-2) = 0^-$. Quindi la prolungata continua di $f$ non è derivabile (né da destra né da sinistra) e $x = 2$ è un punto di cuspide.

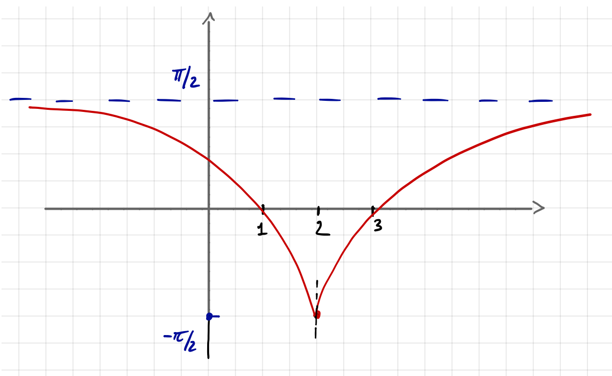
Osserviamo che

$$f'(x) = \frac{1}{1+\log^2(x-2)} \cdot \frac{1}{(x-2)} \qquad x \neq 2.$$

Dunque $f'(x) > 0$ per $x > 2$ e $f'(x) < 0$ per $x < 2$. Quindi la $f$ è strettamente crescente per $x > 2$ e strettamente decrescente per $x < 2$.

La funzione estesa per continuità ha come punto di minimo (assoluto) $x = 2$, e ha valore minimo $-\pi/2$, mentre non ha massimo. L'estremo superiore della funzione è $\pi/2$.

(d) Per il grafico si veda la figura:




Facoltativo: calcolo della derivata seconda. Abbiamo che la funzione è derivabile due volte per ogni $x \neq 2$ e si ha che

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left( \frac{1}{1+\log^2(x-2)} \cdot \frac{1}{(x-2)} \right)' = \\ &= -\frac{1}{\left[1+\log^2(x-2)\right]^2 (x-2)^2} \left[ 2\log(x-2)\frac{(x-2)}{(x-2)} + \log^2(x-2) + 1 \right] = \\ &= -\frac{(1-\log^2(x-2))^2}{\left[1+\log^2(x-2)\right]^2 (x-2)^2}. \end{aligned}$$

Dunque $f''(x) < 0$ per $x \neq 2$, che significa che la funzione è concava su tutto $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

**Esercizio 2** (8 punti) Calcolare al variare di $\alpha > 0$ il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^\alpha - \log(1+x^2)}.$$

*Svolgimento.*

Studiamo per prima cosa il numeratore $e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x$. Dalla formula di Mac Laurin $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$, $\cos(y) = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} + o(y^4)$, se $y \to 0$, quindi

$$e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x = (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}(-\frac{x^2}{2})^2 + o(x^4)) - (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)) = \frac{x^4}{8} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) = \frac{x^4}{12} + o(x^4),\ x \to 0.$$

Per quanto riguarda il denominatore, dalla formula di Mac Laurin $\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$ si ha

$$x^\alpha - \log(1+x^2) = x^\alpha - (x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)) = x^\alpha - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4).$$

Quindi:

- per $\alpha \in (0,2)$, abbiamo
$$x^\alpha - \log(1+x) = x^\alpha + o(x^\alpha).$$
e quindi
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^\alpha - \log(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{12} + o(x^4)}{x^\alpha + o(x^\alpha)} = \lim_{x\to 0} x^{4-\alpha} \frac{\frac{1}{12} + o(1)}{1 + o(1)} = 0.$$

- per $\alpha = 2$, abbiamo
$$x^\alpha - \log(1+x) = \frac{x^4}{2} + o(x^4).$$
e quindi
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^\alpha - \log(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{12} + o(x^4)}{\frac{x^4}{2} + o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{12} + o(1)}{\frac{1}{2} + o(1)} = \frac{1}{6}.$$

- per $\alpha > 2$, abbiamo
$$x^\alpha - \log(1+x) = -x^2 + o(x^2).$$
e quindi
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^\alpha - \log(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{12} + o(x^4)}{-x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} x^{4-2} \frac{\frac{1}{12} + o(1)}{-1 + o(1)} = 0.$$

**Esercizio 3** (8 punti)
a) Calcolare l'integrale indefinito
$$\int \frac{e^{3x}}{e^{6x} + e^{3x} - 2} dx.$$

b) Dire se converge e calcolare l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{3x}}{e^{6x}+e^{3x}-2}dx.$$

*Svolgimento.*

(a) Posto $t = e^{3x}$ abbiamo $3e^{3x}dx = dt$. Sostituendo,

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{6x}+e^{3x}-2}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^2+t-2}dt$$

Poiché $t^2+t-2 = (t-1)(t+2)$ possiamo applicare il metodo dei fratti semplici

$$\frac{1}{t^2+t-2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+2} = \frac{(A+B)t+2A-B}{(t-1)(t+2)}$$

da cui si ottiene $A = 1/3$, $B = -1/3$. Quindi

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{3x}}{e^{6x}+e^{3x}-2}dx &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^2+t-2}dt = \frac{1}{9}\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+2}\right)dt = \\
&= \frac{1}{9}(\log|t-1| - \log|t+2|) + K \\
&= \frac{1}{9}(\log|e^{3x}-1| - \log|e^{3x}+2|) + K \\
&= \frac{1}{9}\log\left(\frac{|e^{3x}-1|}{|e^{3x}+2|}\right) + K.
\end{aligned}$$

(b) La funzione $f(x) = \frac{e^{3x}}{e^{6x}+e^{3x}-2}$ è continua e limitata in $[1,+\infty)$. Sono verificate le ipotesi del teorema del confronto asintotico, perché $f(x) > 0$ in $[1,+\infty)$. Inoltre $f(x) \sim \frac{e^{3x}}{e^{6x}} = \frac{1}{e^{3x}}$ Quindi dal criterio del confronto asintotico $\int_1^{+\infty} \frac{e^{3x}}{e^{6x}+e^{3x}-2}dx$ converge se e solo se $\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^{3x}}dx$ converge. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^{3x}}dx = \lim_{M\to+\infty} \frac{-1}{3}(e^{-3M} - e^{-3}) = \frac{1}{3}e^{-3}$. Quindi anche il nostro integrale converge e poiché conosciamo la primitiva:

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{e^{3x}}{e^{6x}+e^{3x}-2}dx &= \lim_{M\to+\infty}\left[\frac{1}{9}\log\left(\frac{e^{3x}-1}{e^{3x}+2}\right)\right]_1^M = \\
&= \lim_{M\to+\infty}\frac{1}{9}\log\left(\frac{e^{3M}-1}{e^{3M}+2}\right) - \frac{1}{9}\log\left(\frac{e^3-1}{e^3+2}\right) = \\
&= -\frac{1}{9}\log\left(\frac{e^3-1}{e^3+2}\right) = \frac{1}{9}\log\left(\frac{e^3+2}{e^3-1}\right)
\end{aligned}$$

perché $\frac{e^{3M}-1}{e^{3M}+2} \to 1$ se $M \to +\infty$.

Per vedere se l'integrale converge e calcolarlo si poteva anche usare il cambio di variabile del punto a), ottenedo

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{3x}}{e^{6x}+e^{3x}-2}dx = \frac{1}{3}\int_{e^3}^{+\infty} \frac{1}{t^2+t-2}dt$$

e osservare che $g(t) = \frac{1}{t^2+t-2} \sim \frac{1}{t^2}$ se $t \to +\infty$.

**Esercizio 4** (8 punti)
Studiare convergenza assoluta e convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{n+\log(n^2)}{n^3-n^2}\right).$$

*Svolgimento.* Osserviamo che è una serie a termini di segno alternato. Studio per prima la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{n+\log(n^2)}{n^3-n^2}\right).$$

Dalla scala degli infiniti, osserviamo che

$$\frac{n+\log(n^2)}{n^3-n^2}=\frac{n+2\log(n)}{n^3-n^2}\sim\frac{n}{n^3}=\frac{1}{n^2},$$

quindi dal confronto asintotico, poiché $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ abbiamo che $\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{n+\log(n^2)}{n^3-n^2}\right)$ converge e quindi la serie $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{n+\log(n^2)}{n^3-n^2}\right)$ converge assolutamente e quindi converge.