ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Lamberti, P. Musolino, a.a. 2019-2020

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

17 settembre 2020

Tempo di consegna: 1 ora

Considerare la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{x-1}{x}\right).$$

1. Determinarne il dominio e il segno.
2. Determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) della funzione f.
3. Calcolare la derivata della funzione f e studiare gli intervalli di monotonia.
4. Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ è convergente il seguente integrale generalizzato
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha + x} dx$$
e calcolarne il valore per $\alpha = 2$, calcolare cioé
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 + x} dx.$$
5. Studiare al variare di $\alpha > 0$ il valore del seguente limite
$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \left[1 - \cos\left(\frac{1}{n^3}\right)\right].$$
6. Studiare al variare di $\alpha > 0$ la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \left[1 - \cos\left(\frac{1}{n^3}\right)\right].$$

Soluzioni

1. La funzione logaritmo è ben definita quando l'argomento è maggiore di 0, dunque il dominio della funzione si trova risolvendo la disequazione
$$\frac{x-1}{x} > 0 \qquad \text{che ha come soluzioni} \quad x < 0, x > 1.$$
Dunque il dominio è $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.
La funzione logaritmo è positiva quando l'argomento è maggiore di 1, dunque il segno della funzione si trova risolvendo la disequazione
$$\frac{x-1}{x} > 1 \qquad \text{che dà} \quad \frac{x-1-x}{x} > 0 \qquad \text{che ha come soluzione} \quad x < 0.$$
Dunque la funzione è positiva per $x < 0$ e negativa per $x > 1$.

2. Per determinare gli eventuali asintoti verticali calcolo i limiti della funzione in 0^- e in 1^+. Dato che $\lim_{x\to 0^-} \frac{x-1}{x} = +\infty$ e $\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x} = 0^+$ ottengo che
$$\lim_{x\to 0^-} \log\left(\frac{x-1}{x}\right) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1^+} \log\left(\frac{x-1}{x}\right) = -\infty.$$
Dunque $x = 0$ è asintoto verticale (sinistro) e $x = 1$ è asintoto verticale (destro) per la funzione.

   Per determinare gli asintoti orizzontali calcolo il limite della funzione a $\pm\infty$. Dato che $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x} = 1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x}$, ottengo che
$$\lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{x-1}{x}\right) = 0 = \lim_{x\to-\infty} \log\left(\frac{x-1}{x}\right).$$
Dunque $y = 0$ è asintoto orizzontale sia a $+\infty$ che a $-\infty$ per la funzione.

3. Per la regola di derivazione delle funzioni composte, e la derivata di un rapporto ottengo che
$$f'(x) = \frac{x}{x-1}\frac{x-(x-1)}{x^2} = \frac{1}{x(x-1)}.$$
Si ha che $f'(x) > 0$ se e solo se $x(x-1) > 0$, quindi se $x > 1$ oppure $x < 0$. Dunque la funzione f è monotona (strettamente) crescente in tutto il suo dominio.

4. Notiamo che $\frac{1}{x^\alpha + x} > 0$ per $x > 1$. Posso applicare il criterio del confronto asintotico e osservare che
$$\frac{1}{x^\alpha + x} \sim \frac{1}{x^{\max\{\alpha,1\}}} \qquad \text{per } x \to +\infty,$$
e dunque l'integrale è convergente, per il criterio del confronto asintotico, se e solo se $\alpha > 1$.

   Per calcolare il valore dell'integrale devo prima di tutto determinare una primitiva della funzione integranda:
$$\int \frac{1}{x^2 + x} dx.$$
Procediamo con il metodo della scomposizione in fratti semplici dato che $x^2 + x = x(x+1)$. Determiniamo A, B tali che
$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \qquad \text{che dà come risultato } A = 1, B = -1.$$
Dunque
$$\int \frac{1}{x(x+1)} dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{-1}{x+1} dx = \log|x| - \log|x+1| + c = \log\left|\frac{x}{x+1}\right| + c.$$
Per calcolare l'integrale ricordiamo la definizione di integrale generalizzato e il teorema fondamentale del calcolo integrale e otteniamo
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx = \lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{1}{x(x+1)} dx = \lim_{M\to+\infty} \left[\log\left|\frac{x}{x+1}\right|\right]_1^M =$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \log\left(\frac{M}{M+1}\right) - \log\frac{1}{2} = -\log\frac{1}{2} = \log 2.$$

5. Notiamo che $\frac{1}{n^3} \to 0$ per $n \to +\infty$. Possiamo dunque applicare gli sviluppi asintotici e ottenere

$$1-\cos\left(\frac{1}{n^3}\right) = 1-\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^3}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^3}\right)^2\right] = \frac{1}{2n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right) = \frac{1}{n^6}\left(\frac{1}{2}+o(1)\right).$$

Sostituendo nel limite otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha\left[1-\cos\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^\alpha}{n^6}\left(\frac{1}{2}+o(1)\right) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \alpha = 6 \\ 0 & \alpha < 6 \\ +\infty & \alpha > 6. \end{cases}$$

6. Notiamo che $n^\alpha\left[1-\cos\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] > 0$, dunque possiamo applicare il criterio del confronto asintotico. Procedendo come nel punto precedente

$$n^\alpha\left[1-\cos\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] = n^\alpha\frac{1}{n^6}\left(\frac{1}{2}+o(1)\right) \sim \frac{1}{n^{6-\alpha}} \qquad \text{per } n\to+\infty.$$

Per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata la serie converge se e solo se $6-\alpha > 1$, cioé $\alpha < 5$.