ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Lamberti, P. Musolino, a.a. 2019-2020

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

17 luglio 2020

Tempo di consegna: 1 ora

1. Determinare il dominio e gli eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) della seguente funzione
$$f(x) = xe^{\frac{1}{x^2}}.$$

2. Determinare dominio, segno, derivata e intervalli di monotonia della seguente funzione
$$f(x) = \log(1+x^2).$$

3. Calcolare al variare di $\alpha > 0$ il limite
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}}$$

4. Si consideri per $\alpha > 0$ la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right).$$
Dire per quali valori del paramentro $\alpha > 0$ la serie converge assolutamente e per quali valori converge semplicemente.

5. Si consideri la funzione di 2 variabili
$$f(x,y) = \arctan(xy).$$
Determinare i punti critici e studiarne la natura.

Svolgimento

1. Il dominio della funzione è $\{x \in \mathbb{R} \quad x \neq 0\} = (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Calcoliamo il limite in 0. Notiamo che se $x \to 0$, $\frac{1}{x^2} \to +\infty$, e $e^{\frac{1}{x^2}} \to +\infty$ dunque per la gerarchia degli infiniti si ha che
$$\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x^2}} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} xe^{\frac{1}{x^2}} = -\infty$$
che implica che la retta $x = 0$ è asintoto verticale destro e sinistro della funzione. Calcoliamo ora i limiti a $\pm\infty$. Notiamo che se $x \to \pm\infty$, $\frac{1}{x^2} \to 0$ e quindi $e^{\frac{1}{x^2}} \to 1$. Dunque
$$\lim_{x\to+\infty} xe^{\frac{1}{x^2}} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty-} xe^{\frac{1}{x^2}} = -\infty$$

quindi la funzione non ammette asintoti orizzontali. Cerchiamo gli eventuali asintoti obliqui.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x^2}} = 1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^{\frac{1}{x^2}}}{x} = m$$

quindi se la funzione ammette asintoti obliqui a $\pm\infty$ questi sono rette $y = x + q$.

Calcoliamo q. Notiamo che per $x \to \pm\infty$, dato che $\frac{1}{x^2} \to 0$, si ha che $e^{\frac{1}{x^2}} = 1 + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Dunque

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{\frac{1}{x^2}} - x = \lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x^2}} - 1\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = q$$

e analogamente $\lim_{x\to-\infty} xe^{\frac{1}{x^2}} - x = 0$.

Dunque la retta $y = x$ è asintoto obliquo sia a $+\infty$ che a $-\infty$.

2. Dato che $1 + x^2 \geq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, il dominio della funzione coincide con tutto $\mathbb{R}$, e inoltre $f(x) \geq 0$ per ogni x (ricordiamo che $\log x$ è ben definito solo se $x > 0$, e che $\log x \geq 0$ solo se $x \geq 1$). La derivata di f coincide con

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$$

e dunque f è monotona crescente per $x > 0$, e monotona decrescente per $x < 0$. $x = 0$ è punto di minimo assoluto, e il valore minimo è $f(0) = 0$.

3. Se $\alpha > 0$ si ha che $\frac{1}{n^\alpha} \to 0$ per $n \to +\infty$. Dunque

$$\log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) = \frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) = \frac{1}{n^\alpha}(1 + o(1))$$

e inoltre.

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \frac{1}{n} = -\frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{n^3}\left(-\frac{1}{6} + o(1)\right).$$

Sostituendo nel limite otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^\alpha}(1 + o(1))}{\frac{1}{n^3}\left(-\frac{1}{6} + o(1)\right)} = \begin{cases} -6 & \text{se } \alpha = 3 \\ 0 & \text{se } \alpha > 3 \\ -\infty & \text{se } \alpha < 3. \end{cases}$$

4. Dato che $\log(1 + 1/n^\alpha) > 0$ la serie è una serie a termini di segno alterno. Studiamo prima di tutto la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Dato che per $n \to +\infty$ si ha che

$$\log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) \sim \frac{1}{n^\alpha}$$

e la serie armonica generalizzata converge solo per $\alpha > 1$, per il criterio del confronto asintotico si ha che la serie di partenza converge assolutamente se e solo se $\alpha > 1$. In questo caso converge anche semplicemente.

Per studiare la convergenza semplice anche per $\alpha \leq 1$, possiamo applicare il criterio di convergenza di Leibniz per le serie a termini di segno alterno. Infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \log(1 + 1/n^\alpha) = 0$$

e inoltre la successione $(\log(1 + 1/n^\alpha))_n$ è monotona decrescente. Dunque la serie converge semplicemente per ogni $\alpha > 0$.

5. La funzione ha come dominio tutto $\mathbb{R}^2$. Inoltre

$$f_x(x,y) = \frac{y}{1 + x^2y^2}, \quad f_y(x,y) = \frac{x}{1 + x^2y^2}$$

sono funzioni definite su tutto $\mathbb{R}^2$ e continue, quindi la funzione f è differenziabile in ogni punto.

Per trovare i punti critici risolviamo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $(0,0)$. Per studiare la natura del punto critico $(0,0)$ calcoliamo l'Hessiana di f in $(0,0)$. Prima di tutto calcoliamo le derivate doppie

$$f_{xx}(x,y) = \frac{-2xy^3}{(1 + x^2y^2)^2} \qquad f_{yy}(x,y) = \frac{-2x^3y}{(1 + x^2y^2)^2}$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \frac{1 + x^2y^2 - 2x^2y^2}{(1 + x^2y^2)^2} = \frac{1 - x^2y^2}{(1 + x^2y^2)^2}$$

Dunque l'Hessiana in $(0,0)$ è data da

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{yx}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dato che $a = 0$ e che $ac - b^2 = -1 < 0$, il punto $(0,0)$ è un punto di sella.

Il fatto che $(0,0)$ sia un punto di sella poteva esser anche dedotto dal fatto che $f(0,0) = 0$, $f(x,y) > 0$ nel primo e terzo quadrante ($\{(x,y) \mid x > 0, y > 0\}$, $\{(x,y) \mid x < 0, y < 0\}$) e $f(x,y) < 0$ nel secondo e quarto quadrante ($\{(x,y) \mid x < 0, y > 0\}$, $\{(x,y) \mid x > 0, y < 0\}$).