ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Lamberti, P. Musolino, a.a. 2019-2020

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

24 gennaio 2020

TEMA 1

IAM: es 1, 2, 3, 4. IAM1, v.o.: es 1, 2. IAM2, v.o.: es 3, 4.

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x^2-4}{x-3}\right) + \frac{x^2-4}{x-3}.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f (si ricorda che $\arctan(t) + t = 0 \iff t = 0$ e $\arctan(t) + t > 0 \iff t > 0$);

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f nel dominio (eventualmente esteso per continuitá). Studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi. (*Suggerimento:* per lo studio del segno di f' si noti che f è la composizione di $\arctan(t)+t$ e $\frac{x^2-4}{x-3}$ e si osservi anche il segno della derivata di $\arctan(t)+t$)

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Soluzione

(a) Il dominio della funzione è dato da $D = \{x \in \mathbb{R} \,|x \neq 3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$. Il dominio non è simmetrico né periodico, quindi la funzione non è simmetrica né periodica.

Utilizzando il suggerimento si ha che $f(x) > 0$ se e solo se $\frac{x^2-4}{x-3} > 0$ e $f(x) = 0$ se e solo se $\frac{x^2-4}{x-3} = 0$. Dunque con lo studio del grafico dei segni deduciamo che

$$f(x) > 0 \text{ se e solo se } x > 3, \text{ oppure } -2 < x < 2$$

mentre $f(x) = 0$ se e solo se $x = 2, x = -2$.

(b) Notiamo che

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-4}{x-3} = +\infty \qquad \lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-4}{x-3} = -\infty,$$

dunque

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty.$$

In particolare $x = 3$ è un asintoto verticale della funzione e non è possibile prolungare la funzione per continuità in $x = 3$.

Inoltre dato che

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-4}{x-3} = +\infty \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-4}{x-3} = -\infty,$$

si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

e la funzione non ha asintoti orizzontali.

Cerchiamo gli eventuali asintoti obliqui.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x^2-4}{x-3}\right)}{x} + \frac{x^2-4}{x(x-3)} = 1$$

e analogamente

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x^2-4}{x-3}\right)}{x} + \frac{x^2-4}{x(x-3)} = 1.$$

Dunque se ci sono asintoti obliqui questi hanno pendenza $m = 1$. Inoltre

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) - x &= \lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{x^2-4}{x-3}\right) + \frac{x^2-4}{(x-3)} - x \\ &= \lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{x^2-4}{x-3}\right) + \frac{3x-4}{(x-3)} = \frac{\pi}{2} + 3.\end{aligned}$$

Analogamente

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - x = \lim_{x\to-\infty} \arctan\left(\frac{x^2-4}{x-3}\right) + \frac{3x-4}{(x-3)} = -\frac{\pi}{2} + 3.$$

Dunque la retta $y = x + \frac{\pi}{2} + 3$ è asintoto obliquo a $+\infty$, mentre la retta $y = x - \frac{\pi}{2} + 3$ è asintoto obliquo a $-\infty$.

(c) La funzione è continua nel suo dominio in quanto somma e composizione di funzioni continue.

Calcoliamo la derivata. Utilizzando il suggerimento notiamo che la funzione è composizione della funzione $x \mapsto x + \arctan x$, la cui derivata è $1 + \frac{1}{1+x^2}(> 0)$ e della funzione $x \mapsto \frac{x^2-4}{x-3}$ la cui derivata è $\frac{2x(x-3)-(x^2-4)}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x+4}{(x-3)^3}$. Per la regola del calcolo della derivata di funzioni composte si ha che

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2-4}{x-3}\right)^2}\right) \frac{x^2-6x+4}{(x-3)^2}.$$

Notiamo che la derivata è ben definita in tutto il dominio della funzione. Quindi la funzione è derivabile in tutto il dominio della funzione.

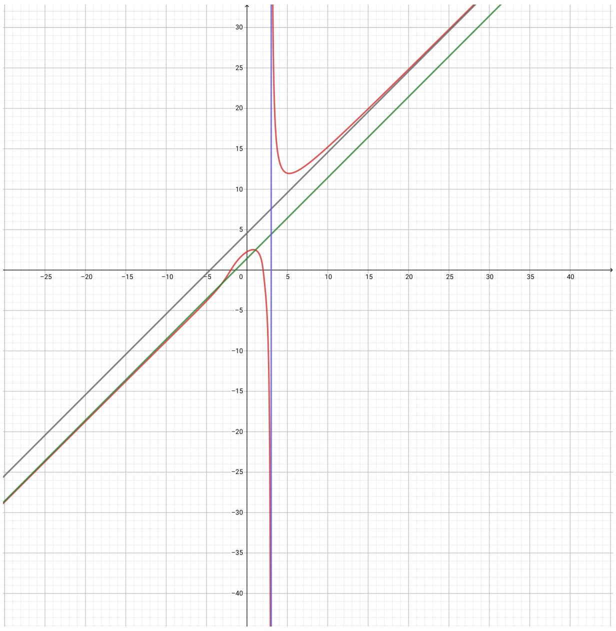
Inoltre

$$f'(x) > 0 \text{ se e solo se } x^2 - 6x + 4 > 0 \text{ se e solo se } x < 3 - \sqrt{5} \text{ oppure } x > 3 + \sqrt{5}.$$

Per il criterio di monotonia la funzione è crescente negli intervalli $(3+\sqrt{5}, +\infty)$, $(-\infty, 3-\sqrt{5})$ e decrescente negli intervalli $(3-\sqrt{5}, 3)$ e $(3, 3+\sqrt{5})$.

Inoltre $x = 3 - \sqrt{5}$ è un punto di massimo locale, mentre $x = 3 + \sqrt{5}$ è un punto di minimo locale.

(d) Per il grafico si veda la figura:



Esercizio 2 (8 punti) Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1 - \sin x}{x^\alpha - \sin x}$$

al variare di $\alpha > 0$.

Soluzione Utilizziamo i polinomi di Taylor in $x = 0$ (o di Mc Laurin) per le funzioni regolari $e^x, \sin x$ per riscrivere numeratore e denominatore.

$$e^x - 1 - \sin x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - 1 - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) = x^2\left(\frac{1}{2} + o(1)\right)$$

$$x^\alpha - \sin x = x^\alpha - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = \begin{cases} \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x^3\left(\frac{1}{6} + o(1)\right) & \alpha = 1 \\ -x + x^\alpha + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x(-1 + o(1)) & \alpha > 1 \\ x^\alpha - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x^\alpha(1 + o(1)) & 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Sostituendo nel limite abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1 - \sin x}{x^\alpha - \sin x} = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)}{x^3\left(\frac{1}{6}+o(1)\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{2}+o(1)}{x\left(\frac{1}{6}+o(1)\right)} = +\infty & \alpha = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)}{x(-1+o(1))} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)}{-1+o(1)} = 0 & \alpha > 1 \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)}{x^\alpha(1+o(1))} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{2-\alpha}\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)}{1+o(1)} = 0 & 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Quindi il limite è sempre 0, tranne per $\alpha = 1$, nel qual caso è $+\infty$.

Esercizio 3 (8 punti)
Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{2\cos x + 1}{\cos^2 x - 5\cos x + 6} \sin x dx.$$

Soluzione Effettuiamo il cambio di variabile $y = \cos x$. Dunque $dy = -\sin x dx$, e se $x = -\pi/2$ allora $y = 0$, mentre se $x = 0$ allora $y = 1$. Dunque l'integrale diventa

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{2\cos x + 1}{\cos^2 x - 5\cos x + 6} \sin x dx = -\int_0^1 \frac{2y+1}{y^2 - 5y + 6} dy.$$

Calcoliamo le primitive della funzione razionale fratta $\frac{2y+1}{y^2-5y+6}$. Osserviamo prima di tutto che $y^2 - 5y + 6 = (y-2)(y-3)$ e che

$$\frac{2y+1}{y^2-5y+6} = \frac{-5}{y-2} + \frac{7}{y-3}.$$

Dunque

$$\int \frac{2y+1}{y^2-5y+6} dy = \int \frac{-5}{y-2} dy + \int \frac{7}{y-3} dy = -5\log|y-2| + 7\log|y-3| + c.$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale possiamo concludere che

$$\begin{aligned}
&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{2\cos x + 1}{\cos^2 x - 5\cos x + 6} \sin x dx = -\int_0^1 \frac{2y+1}{y^2-5y+6} dy \\
&= -\left[-5\log|y-2| + 7\log|y-3|\right]_0^1 = -[-5\log 1 + 7\log 2 + 5\log 2 - 7\log 3] \\
&= 7\log 3 - 12\log 2.
\end{aligned}$$

Esercizio 4 (8 punti)

1. Discutere il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^n \arctan\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

2. Discutere al variare del parametro $\alpha \in (0, +\infty)$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n \arctan(\alpha^n)}{n^3}.$$

Soluzione

1. Notiamo la serie è una serie a termini positivi. Dato che $\frac{1}{2^n} \to 0$ per $n \to +\infty$, utilizzando il polinomio di Taylor in $x = 0$ (o di Mc Laurin) della funzione regolare $\arctan x$ abbiamo che

$$e^n \arctan\left(\frac{1}{2^n}\right) = e^n\left(\frac{1}{2^n} + o\left(\frac{1}{2^n}\right)\right) = e^n \frac{1}{2^n}(1 + o(1)) \sim \frac{e^n}{2^n} = \left(\frac{e}{2}\right)^n.$$

   Inoltre dato che $\frac{e}{2} > 1$ la serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e}{2}\right)^n$ diverge.

   Concludiamo per il principio del confronto asintotico che anche la serie di partenza diverge.

2. Notiamo che per ogni $\alpha > 0$ la serie è una serie a termini positivi. Inoltre per $\alpha > 0$ si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha^n = \begin{cases} +\infty & \alpha > 1 \\ 1 & \alpha = 1 \\ 0 & 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

In particolare

$$\lim_{n\to+\infty} \arctan \alpha^n = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \alpha = 1 \\ \frac{\pi}{2} & \alpha > 1. \end{cases}$$

Dunque dato e^n è un infinito di ordine maggiore di n^3, se $\alpha \geq 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n \arctan(\alpha^n)}{n^3} = +\infty.$$

Questo implica che la serie non è convergente (dato che non è soddisfatta la condizione necessaria di convergenza) e dato che è una serie a termini positivi, necessariamente è divergente.

Se invece $0 < \alpha < 1$, utilizzando il polinomio di Taylor in $x = 0$ (o di Mc Laurin) della funzione regolare $\arctan x$ abbiamo che

$$\frac{e^n \arctan(\alpha^n)}{n^3} = \frac{e^n(\alpha^n + o(\alpha^n))}{n^3} = \frac{e^n \alpha^n (1 + o(1))}{n^3} \sim \frac{(e\alpha)^n}{n^3}.$$

Studiamo dunque la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(e\alpha)^n}{n^3}$. Applichiamo il criterio della radice e otteniamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(e\alpha)^n}{n^3}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e\alpha}{\sqrt[n]{n^3}} = e\alpha.$$

Dunque se $e\alpha > 1$, cioé se $\alpha > \frac{1}{e}$, la serie è divergente, mentre se $e\alpha < 1$ cioé $\alpha < \frac{1}{e}$ la serie è convergente.

Se $\alpha = \frac{1}{e}$ il criterio non dà informazioni, ma in quel caso la serie diventa $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ che è una serie armonica generalizzata, che converge perché $3 > 1$.

Riassumendo, per il criterio del confronto asintotico, se $\alpha \leq \frac{1}{e}$ la serie è convergente, se $\alpha > \frac{1}{e}$ la serie è divergente (a $+\infty$).

ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Lamberti, P. Musolino, a.a. 2019-2020

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

24 gennaio 2020

TEMA 2

IAM: es 1, 2, 3, 4. IAM1, v.o.: es 1, 2. IAM2, v.o.: es 3, 4.

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x^2-9}{x-5} + \arctan\left(\frac{x^2-9}{x-5}\right).$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f (si ricorda che $\arctan(t) + t = 0 \iff t = 0$ e $\arctan(t) + t > 0 \iff t > 0$);

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f nel dominio (eventualmente esteso per continuitá). Studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi. (*Suggerimento:* per lo studio del segno di f' si noti che f è la composizione di $\arctan(t)+t$ e $\frac{x^2-9}{x-5}$ e si osservi anche il segno della derivata di $\arctan(t)+t$)

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Esercizio 2 (8 punti) Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - \log(1+x)}{\log(1+x) - x^\alpha}$$

al variare di $\alpha > 0$.

Esercizio 3 (8 punti)
Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{3\sin x}{\sin^2 x - 6\sin x + 8} \cos x dx.$$

Esercizio 4 (8 punti)

1. Discutere il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \arctan(4^{-n}) \, .$$

2. Discutere al variare del parametro $\alpha \in (0, +\infty)$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \arctan(\alpha^{-n})}{n} \, .$$

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende esclusi i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.

ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Lamberti, P. Musolino, a.a. 2019-2020

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

24 gennaio 2020

TEMA 3

IAM: es 1, 2, 3, 4. IAM1, v.o.: es 1, 2. IAM2, v.o.: es 3, 4.

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = -\arctan\left(\frac{x^2-4}{x-6}\right) - \frac{x^2-4}{x-6}.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f (si ricorda che $\arctan(t) + t = 0 \iff t = 0$ e $\arctan(t) + t > 0 \iff t > 0$);

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f nel dominio (eventualmente esteso per continuitá). Studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi. (*Suggerimento:* per lo studio del segno di f' si noti che f è la composizione di $-\arctan(t) - t$ e $\frac{x^2-4}{x-6}$ e si osservi anche il segno della derivata di $-\arctan(t) - t$)

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Esercizio 2 (8 punti) Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan x - \sin x}{x^\alpha - \tan x}$$

al variare di $\alpha > 0$.

Esercizio 3 (8 punti)

Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_0^{\log 2} \frac{e^{2x} + e^x}{e^{2x} + 5e^x + 6} dx.$$

Esercizio 4 (8 punti)

1. Discutere il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \log\left(1 + \frac{1}{5^n}\right).$$

2. Discutere al variare del parametro $\alpha \in (0, +\infty)$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \log(1 + \alpha^n)}{n^2}.$$

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende esclusi i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.

ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Lamberti, P. Musolino, a.a. 2019-2020

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

24 gennaio 2020

TEMA 4

IAM: es 1, 2, 3, 4. IAM1, v.o.: es 1, 2. IAM2, v.o.: es 3, 4.

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = -\arctan\left(\frac{x^2-9}{x-7}\right) - \frac{x^2-9}{x-7}.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f (si ricorda che $\arctan(t) + t = 0 \iff t = 0$ e $\arctan(t) + t > 0 \iff t > 0$);

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f nel dominio (eventualmente esteso per continuitá). Studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi. (*Suggerimento:* per lo studio del segno di f' si noti che f è la composizione di $-\arctan(t) - t$ e $\frac{x^2-9}{x-7}$ e si osservi anche il segno della derivata di $-\arctan(t) - t$)

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Esercizio 2 (8 punti) Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x) - \tan x}{x^\alpha - \log(1+x)}$$

al variare di $\alpha > 0$.

Esercizio 3 (8 punti)
Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_1^e \frac{4\log x}{x(\log^2 x - 2\log x - 3)} dx.$$

Esercizio 4 (8 punti)

1. Discutere il carattere della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} 4^n \log(1+3^{-n}).$$

2. Discutere al variare del parametro $\alpha \in (0, +\infty)$ la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \log(1+\alpha^{-n})}{\sqrt{n}}.$$

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende esclusi i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.