# ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

**Commissione A. Cesaroni, P. Lamberti, P. Musolino, a.a. 2019-2020**

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

30 giugno 2020

**Tempo di consegna: 1 ora**

Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

1. Determinare il dominio di $f$, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di $f$. Determinare i limiti di $f$ agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f$, eventuali punti in cui è possibile prolungare $f$ per continuità.

2. Calcolare la derivata di $f$. La funzione o eventualmente la sua estensione per continuità ammette massimo? Ammette minimo? Giustificare la risposta.

3. Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha - x^3 \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

4 Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ è convergente l'integrale

$$\int_1^{+\infty} x^\alpha \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) dx.$$

5 Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \arctan t\, dt.$$

6 Calcolare l'integrale del punto 4 per $\alpha = -3$ calcolare cioé

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) dx.$$

(suggerimento: fare un cambio di variabile)

## Soluzione

1. Il dominio di $f$ è $\{x \in \mathbb{R}, x \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Inoltre $f(x) = f(-x)$ dunque la funzione è pari.

   Si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) = \arctan(0) = 0$$

dunque $y = 0$ è asintoto orizzontale sia a $+\infty$ che a $-\infty$. Inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0^-} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

$x = 0$ è una singolarità eliminabile ed è possibile estendere per continuità la funzione in 0 ponendo $f(0) = \frac{\pi}{2}$.

2.
$$f'(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x^4}} \left(\frac{-2}{x^3}\right) = -\frac{2x}{x^4 + 1}.$$

La funzione (prolungata per continuità) ammette massimo, e il punto di massimo assoluto è $x = 0$, il massimo è $\frac{\pi}{2}$. La funzione non ammette minimo, ma $\inf f = 0$.

3. Notiamo che se $x \to +\infty$, si ha che $\frac{1}{x^2} \to 0$, e dunque

$$\arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3x^6} + o\left(\frac{1}{x^6}\right).$$

Sostituendo nel limite otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha - x^3 \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^\alpha - x^3 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{3x^6} + o\left(\frac{1}{x^6}\right)\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^\alpha - x - \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) =$$

$$= \begin{cases} \text{se } \alpha = 1 & = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) = 0 \\ \text{se } \alpha > 1 & = \lim_{x\to+\infty} x^\alpha \left(1 - x^{1-\alpha} - \frac{1}{3}x^{-3-\alpha} + o(x^{-3-\alpha})\right) = +\infty \\ \text{se } \alpha < 1 & = \lim_{x\to+\infty} x\left(x^{\alpha-1} - 1 - \frac{1}{3x^2} + o(x^{-2})\right) = -\infty. \end{cases}$$

4. Ricordando lo sviluppo asintotico di $\arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)$ scritta nel punto precedente osserviamo che

$$x^\alpha \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) \sim x^\alpha \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^{2-\alpha}} \text{ per } x \to +\infty.$$

Dato che

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2-\alpha}} dx < +\infty \text{ se e solo se } 2 - \alpha > 1, \text{ cioé se } \alpha < 1$$

per il criterio del confronto asintotico l'integrale di partenza converge se e solo se $\alpha < 1$.

5. Integriamo per parti

$$\int \arctan t \, dt = t \arctan t - \int t \frac{1}{1 + t^2} \, dt = t \arctan t - \frac{1}{2} \log(1 + t^2) + c.$$

6. Procediamo con il cambio di variabile $y = \frac{1}{x^2}$. Quindi abbiamo che $dy = \frac{-2}{x^3} dx$. L'integrale diventa

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) dx = \int_1^0 \arctan y \frac{1}{-2} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \arctan y dy.$$

Concludiamo per il teorema fondamentale del calcolo integrale, utilizzando l'integrale indefinito calcolato nel punto precendente

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \arctan y dy = \frac{1}{2} \left[ y \arctan y - \frac{1}{2} \log(1 + y^2) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \arctan 1 - \frac{1}{4} \log 2 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \log 2.$$