ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Lamberti, P. Musolino, a.a. 2019-2020

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

17 febbraio 2020

TEMA 1

IAM: es 1, 2, 3, 4. IAM1, v.o.: es 1, 2. IAM2, v.o.: es 3, 4.

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)} e^{\frac{1}{(x-1)(x-2)}}.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f nel dominio (eventualmente esteso per continuitá). Studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi.

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Soluzione

(a) Il dominio della funzione è dato da $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1, 2\}$, cioé $D = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$. Il dominio non è simmetrico rispetto a 0 né periodico, quindi la funzione non è pari né dispari né periodica.

Dato che $e^x > 0$ per ogni x, $f(x) > 0$ se e solo se $(x-1)(x-2) > 0$. Lo studio dei segni dà che $f(x) > 0$ se e solo se $x < 1$ oppure $x > 2$. f non si annulla mai.

(b) Dato che

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)(x-2)} = -\infty \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)(x-2)} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{(x-1)(x-2)} = +\infty \quad \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{(x-1)(x-2)} = -\infty$$

si ottiene che

$$\lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{(x-1)(x-2)}} = 0 \quad \lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{(x-1)(x-2)}} = +\infty \quad \lim_{x\to 2^+} e^{\frac{1}{(x-1)(x-2)}} = +\infty \quad \lim_{x\to 2^-} e^{\frac{1}{(x-1)(x-2)}} = 0$$

e dunque per la scala degli infiniti (dato che l'infinito esponenziale è di ordine superiore all'infinito polinomiale) si ha che

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0 \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 0.$$

Dunque $x = 1$ è asintoto verticale sinistro e $x = 2$ è asintoto verticale destro.

Inoltre

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to -\infty} f(x)$$

dunque $y = 0$ è asintoto orizzontale a $\pm\infty$.

(c) La funzione è continua nel suo dominio.

Per calcolare la derivata di f, osserviamo che $f(x) = g(h(x))$ con $g(x) = xe^x$ e $h(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$. Dato che $g'(x) = (1+x)e^x$ e $h'(x) = \frac{3-2x}{(x-1)^2(x-2)^2}$ per la regola di calcolo di composizione delle derivate si ha

$$f'(x) = g'(h(x))h'(x) = \left(1 + \frac{1}{(x-1)(x-2)}\right) e^{\frac{1}{(x-1)(x-2)}} \frac{3-2x}{(x-1)^2(x-2)^2} =$$
$$= \frac{(x^2-3x+3)(3-2x)}{(x-1)^3(x-2)^3} e^{\frac{1}{(x-1)(x-2)}}.$$

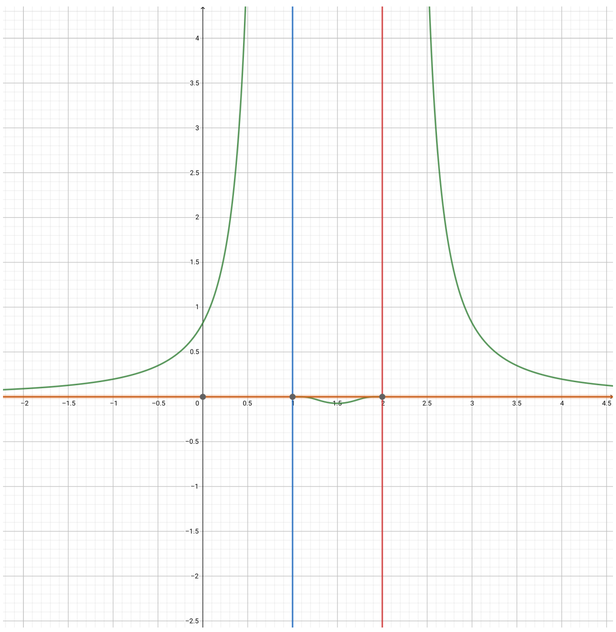
Notiamo che la funzione è derivabile nel suo dominio. Inoltre, per la scala degli infiniti,

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 2^-} f'(x) = 0.$$

Osserviamo che $x^2 - 3x + 3 > 0$ per ogni x, dunque $f'(x) > 0$ se e solo se $\frac{3-2x}{(x-1)(x-2)} > 0$. Per lo studio dei segni $f'(x) > 0$ se $x < 1$, oppure $\frac{3}{2} < x < 2$ e negativa altrove.

Inoltre $x = \frac{3}{2}$ è un punto di minimo locale e anche assoluto, $f(3/2) = -4e^{-4}$.

(d) Per il grafico si veda la figura:



Esercizio 2 (8 punti) Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - x^\alpha}{\cos x - \cosh x}$$

al variare di $\alpha > 0$.

Soluzione Utilizziamo i polinomi di Taylor in $x = 0$ (o di Mc Laurin). Il numeratore diventa

$$\sin x - x^\alpha = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x^\alpha = \begin{cases} x^3\left(-\frac{1}{6} + o(1)\right) & \alpha = 1 \\ x\ (1 + o(1)) & \alpha > 1 \\ x^\alpha(-1 + o(1)) & \alpha < 1 \end{cases}$$

e il denominatore

$$\cos x - \cosh x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = x^2(-1 + o(1)).$$

Dunque sostituendo nel limite otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - x^\alpha}{\cos x - \cosh x} = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3\left(-\frac{1}{6}+o(1)\right)}{x^2(-1+o(1))} = 0 & \alpha = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{x(1+o(1))}{x^2(-1+o(1))} = -\infty & \alpha > 1 \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha(-1+o(1))}{x^2(-1+o(1))} = +\infty & \alpha < 1. \end{cases}$$

Esercizio 3 (8 punti)

1. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\frac{1}{n^\alpha}.$$

2. Dire se converge e in caso calcolare l'integrale
$$\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{x^3}dx.$$

Soluzione

1. Notiamo che dato che $0 < \frac{1}{n^2} \leq 1 < \frac{\pi}{2}$, la serie è una serie a termini positivi. Dato che
$$\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{n^2}\frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{2+\alpha}} \qquad \text{per } n \to +\infty$$
per il criterio del confronto asintotico la serie converge se e solo se $2 + \alpha > 1$, cioé se e solo se $\alpha > -1$ e diverge a $+\infty$ altrimenti.

2. Calcoliamo prima di tutto, per $M > 1$, il valore di
$$\int_1^{M} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{x^3}dx$$
(poi calcoleremo il limite per $M \to +\infty$).
Operiamo la sostituzione $y = \frac{1}{x^2}$, e abbiamo che $dy = -\frac{2}{x^3}dx$ e che l'integrale diventa
$$\int_1^{M} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{x^3}dx = -\frac{1}{2}\int_1^{\frac{1}{M^2}} \sin(y)\, dy = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{M^2}}^{1} \sin(y)\, dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\cos y\right]_{1/M^2}^{1} = \frac{-\cos 1 + \cos\left(\frac{1}{M^2}\right)}{2}.$$

Dunque l'integrale converge e il suo valore è dato da

$$\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{x^3}dx = \lim_{M\to+\infty}\int_1^{M} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{x^3}dx$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \frac{-\cos 1 + \cos\left(\frac{1}{M^2}\right)}{2} = \frac{-\cos(1)+1}{2}.$$

Esercizio 4 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x^3 - y^3 + 6xy.$$

1. Calcolare la derivata direzionale di f lungo la direzione $v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ nel punto $(1,0)$.
2. Determinare i punti critici di f e studiarne la natura.

Soluzione

1. La funzione è regolare (in particolare differenziabile) su tutto $\mathbb{R}^2$, dunque possiamo utilizzare la formula del gradiente. Calcoliamo le derivate parziali

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 3x^2 + 6y \\ f_y(x,y) = -3y^2 + 6x. \end{cases}$$

Per la formula del gradiente

$$D_v f(1,0) = f_x(1,0)\frac{\sqrt{2}}{2} + f_y(1,0)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\frac{\sqrt{2}}{2} + 6\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

2. Per determinare i punti critici di f risolviamo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 3x^2 + 6y = 0 \\ f_y(x,y) = -3y^2 + 6x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 = -2y \\ y^2 = 2x \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 = -2y \\ \frac{x^4}{4} = 2x \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 = -2y \\ x = 0, x = 2. \end{cases}$$

Abbiamo due soluzioni $(0,0)$ e $(2,-2)$. Quindi i punti critici di f sono $(0,0)$ e $(2,-2)$.

Per studiare la natura dei punti critici utilizziamo il criterio dell'Hessiana. Osserviamo che $f_{xx}(x,y) = 6x$, $f_{xy}(x,y) = 6 = f_{yx}(x,y)$, $f_{yy}(x,y) = -6y$ dunque

$$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad D^2 f(2,-2) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Dato che $D^2 f(0,0)$ è indefinita, $(0,0)$ è un punto di sella, mentre dato che $D^2 f(2,-2)$ è definita positiva, $(2,-2)$ è un punto di minimo locale.

ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Lamberti, P. Musolino, a.a. 2019-2020

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

17 febbraio 2020

TEMA 2

IAM: es 1, 2, 3, 4. IAM1, v.o.: es 1, 2. IAM2, v.o.: es 3, 4.

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = -\frac{1}{(x-2)(x-3)} e^{\frac{1}{(x-2)(x-3)}}.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f nel dominio (eventualmente esteso per continuitá). Studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi.

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Esercizio 2 (8 punti) Calcolare

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^\alpha - \arctan x}{e^x - 1 - \log(1+x)}$$

al variare di $\alpha > 0$.

Esercizio 3 (8 punti)

1. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \left(e^{\frac{1}{n^3}} - 1 \right).$$

2. Dire se converge e in caso calcolare l'integrale
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} \left(e^{\frac{1}{x^3}} - 1 \right) dx.$$

Esercizio 4 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

1. Calcolare la derivata direzionale di f lungo la direzione $v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ nel punto $(0, 1)$.

2. Determinare i punti critici di f e studiarne la natura.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende esclusi i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.