ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, a.a. 2020-2021

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

15 luglio 2021

TEMA 1

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2 \arctan(x^2).$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità e il segno della funzione;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi;

(e) disegnare un grafico qualitativo di f.

NON è richiesto lo studio della derivata seconda di f.

Soluzione

(a) La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, è pari perché dipende solo da x^2 e non è periodica. Inoltre dato che $\arctan(y) \geq 0$ se e solo se $y \geq 0$ si deduce che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$. Poiché la funzione è pari, possiamo studiarla per $x \geq 0$ e poi dedurre il suo grafico per simmetria rispetto all'asse delle y anche per $x < 0$.

(b) Calcoliamo il limite a $+\infty$. Poiché $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x^2) = \pi/2$, si deduce che

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \arctan(x^2) = +\infty$$

quindi la funzione non ha un asintoto orizzontale. Cerco l'asintoto obliquo. Dato che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 \arctan(x^2)}{x} = \lim_{x\to+\infty} x \arctan(x^2) = +\infty$$

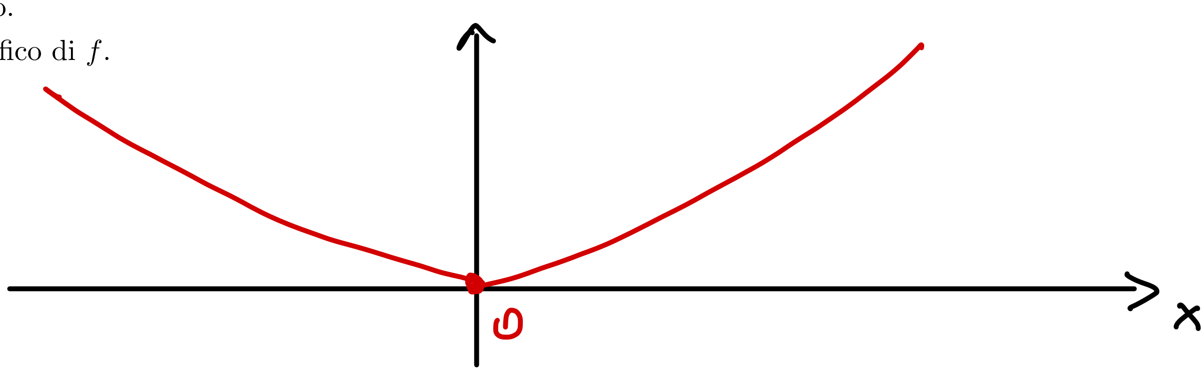
la funzione non ha asintoto obliquo.

(c) La funzione è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$ perché prodotto e composizione di funzioni derivabili su $\mathbb{R}$. Calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = 2x \arctan(x^2) + x^2 \frac{1}{1+x^4} 2x = 2x \left(\arctan(x^2) + \frac{x^2}{1+x^4} \right)$$

Poiché il termine tra parentesi è sempre non negativo, il segno dipenderà dal segno di x, quindi $f'(x) > 0$ se e solo se $x > 0$ e quindi si ha che la funzione è crescente per $x > 0$, decrescente per $x < 0$ e in $x = 0$ in cui $f'(0) = 0$ si ha un punto di minimo locale. Inoltre dalle proprietà della funzione (visto che tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$ e che $f(0) = 0$) $x = 0$ è un punto di minimo assoluto.

(e) Grafico di f.



Esercizio 2 (8 punti) 1) Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2\,n^\alpha - \log n + 2}{n^3+1}.$$

2) Studiare la convergenza della serie al variare di $\alpha > 0$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\,n^\alpha - \log n + 2}{n^3+1}.$$

Soluzione 1) Poiché $\alpha > 0$, dalla scala degli infiniti, se $n \to +\infty$,

$$a_n = \frac{2\,n^\alpha - \log n + 2}{n^3+1} \sim \frac{2\,n^\alpha}{n^3} = \frac{2}{n^{3-\alpha}}.$$

Quindi $a_n \to 0$ se $\alpha > 3$, $a_n \to 2$ se $\alpha = 3$, $a_n \to +\infty$ se $\alpha < 3$.
2) Dal punto 1) poiché $a_n \sim \frac{2}{n^{3-\alpha}}$ se $n \to +\infty$, dal criterio del confronto asintotico si ottiene che la serie converge se e solo se $3-\alpha > 1$ cioè se e solo se $\alpha < 2$.

Esercizio 3 (8 punti)
Calcolare

$$\int_0^2 5\,e^{x^3}\,x^2 dx.$$

Soluzione

Usiamo il cambio di variabile $x^3 = t$ (e quindi $dt = 3x^2dx$). Se $x = 0$ si ha $t = 0$, se $x = 2$ si ha che $t = 8$. Quindi l'integrale diventa

$$\int_0^2 5\,e^{x^3}\,x^2 dx = \frac{5}{3}\int_0^8 e^t dt = \frac{5}{3}\left[e^t\right]_0^8 = \frac{5}{3}(e^8-1).$$

Esercizio 4 (8 punti)
Sia

$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 2x$$

1) Determinare dominio di $f(x,y)$ e calcolare le derivate parziali.
2) Trovare i punti critici e studiarne la natura.

Soluzione
1) Il dominio di $f(x,y)$ è tutto $\mathbb{R}^2$. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - y - 2; \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - x$$

2) I punti critici si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = & 2x - y - 2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = & 2y - x = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ottiene $x = 2y$ che sostituita nella prima fornisce $4y - y = 2$ cioè $y = 2/3$ e quindi $x = 4/3$. Quindi l'unico punto critico è $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Per studiarne la natura si scrivono le derivate parziali seconde, si calcolano nel punto critico e si studia il segno della matrice Hessiana. Si ottiene $f_{xx}(x,y) = 2$, $f_{yy}(x,y) = 2$, $f_{xy}(x,y) = -1$. Quindi le derivate seconde sono costanti e quindi l'Hessiana in $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ è

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Poiché il suo determinante è 3 e l'elemento in alto a sinistra è uguale a 2, otteniamo che l'Hessiana è definita positiva quindi il punto $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ è un punto di minimo relativo.