ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, a.a. 2020-2021

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

24 giugno 2021

TEMA 1

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = x \log x - 3x.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità e il segno della funzione;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) calcolare la derivata seconda di f e determinare gli intervalli di concavità e convessità con eventuali punti di flesso.

(e) disegnare un grafico qualitativo di f.

Soluzione

(a) La funzione è definita per $x > 0$ e dunque non è periodica, né simmetrica. Inoltre dato che $f(x) = x(\log x - 3)$, e che nel dominio si ha che $x > 0$, deduciamo che $f(x) > 0$ se e solo se $\log x > 3$, cioé se e solo se $x > e^3$.

(b) Calcoliamo i limiti a $+\infty$, e a 0^+.

$$\lim_{x\to+0^+} x \log x - 3x = 0$$

per la scala degli infiniti ($\lim_{x\to 0^+} x \log x = 0$). Quindi la funzione si può prolungare per continuità in $x = 0$ ponendo $f(0) = 0$.

Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} x(\log x - 3) = +\infty$$

quindi la funzione non ha un asintoto orizzontale. Cerco l'asintoto obliquo. Dato che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x(\log x - 3)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \log x - 3 = +\infty$$

la funzione non ha asintoto obliquo.

(c) La funzione è continua su tutto il suo dominio esteso, cioé su $[0, +\infty)$. Calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = \log x + x\frac{1}{x} - 3 = \log x + 1 - 3 = \log x - 2.$$

La funzione è derivabile per ogni $x > 0$. Calcoliamo

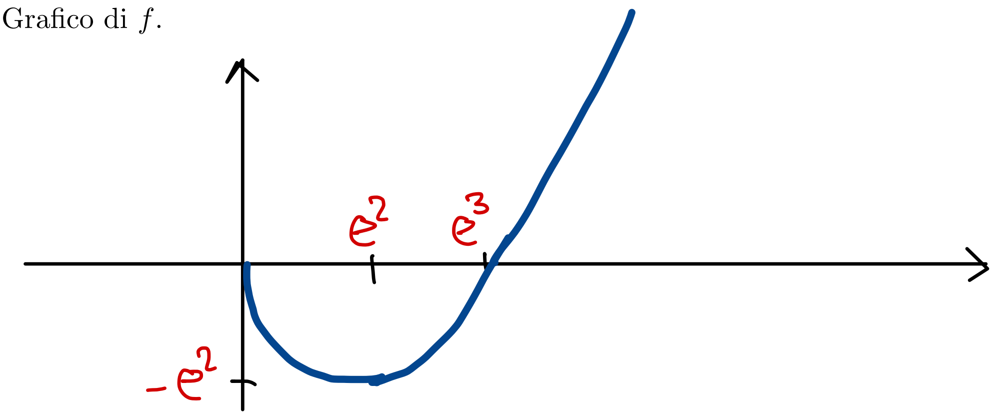
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \log x - 2 = -\infty,$$

quindi in $x = 0$ la funzione ha tangente verticale.

Infine dato che $f'(x) > 0$ se e solo se $\log x > 2$, cioè se e solo se $x > e^2$ si ha che la funzione è crescente per $x > e^2$, decrescente per $0 < x < e^2$ e $x = e^2$ è un punto di minimo locale. Inoltre dalle proprietà della funzione (visto che tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$ e che $f(0) = 0$) $x = e^2$ è un punto di minimo assoluto. $f(e^2) = -e^2$.

(d) Calcoliamo $f''(x) = \frac{1}{x}$. Quindi la funzione è derivabile due volte per ogni $x > 0$, ed è convessa in quanto $f''(x) > 0$ per ogni $x > 0$.

(e) Grafico di f.



Esercizio 2 (8 punti) Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\alpha x - \sin x}{e^x - \cos x}.$$

Soluzione Utilizziamo gli sviluppi asintotici con polinomi di Taylor:

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{4} + o(x^2).$$

Il denominatore diventa

$$\alpha x - \sin x = \alpha x - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = (\alpha - 1)x + + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = \begin{cases} (\alpha - 1)x + o(x) & \alpha \neq 1 \\ \frac{x^3}{6} + o(x^3) & \alpha = 1. \end{cases}$$

Il denominatore diventa

$$e^x - \cos x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 + \frac{x^2}{4} + o(x^2) = x + \frac{3}{4}x^2 + o(x^2) = x + o(x).$$

Sostituendo nel limite otteniamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\alpha x - \sin x}{e^x - \cos x} = \begin{cases} \lim_{x\to 0} \frac{(\alpha-1)x + o(x)}{x + o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x[(\alpha-1)+o(1)]}{x[1+o(1)]} = \alpha - 1 & \alpha \neq 1 \\ \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x + o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3[1/6 + o(1)]}{x[(1+o(1)]} = 0 & \alpha = 1. \end{cases}$$

Esercizio 3 (8 punti)

1) Calcolare le primitive di

$$\frac{\arctan^2 x}{1 + x^2}.$$

2) Determinare se è finito l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx$$

e in caso calcolarlo.

Soluzione
1) Usiamo il cambio di variabile $\arctan x = t$ (e quindi $dt = \frac{1}{1+x^2}dx$). L'integrale diventa

$$\int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + c = \frac{\arctan^3 x}{3} + c.$$

2) Dato che

$$\frac{\arctan^2 x}{1+x^2} \sim \frac{1}{x^2} \qquad \text{per } x \to +\infty$$

l'integrale è finito per confronto asintotico. Calcoliamolo utilizzando le primitive ottenute nel punto 1:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx &= \lim_{M\to+\infty} \left[\frac{\arctan^3 x}{3}\right]_1^M = \lim_{M\to+\infty} \frac{\arctan^3 M}{3} - \frac{\arctan^3(1)}{3} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 = \frac{7\pi^3}{4^3 3}. \end{aligned}$$

Esercizio 4 (8 punti)
i) Calcolare, al variare di $\alpha > 0$, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^\alpha}.$$

ii) Studiare, al variare di $\alpha > 0$, la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^\alpha}.$$

Soluzione
1) Utilizzando i prodotti notevoli abbiamo che

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}.$$

Dunque otteniamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^\alpha} = \lim_{n} \frac{1}{n^\alpha\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} = 0$$

per ogni $\alpha > 0$.

Possiamo studiare il limite al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^\alpha} = \lim_n \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} = \begin{cases} 0 & \alpha > -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \alpha = -\frac{1}{2} \\ +\infty & \alpha < -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

2) Osserviamo che la serie è a termini positivi, e che per il punto precedente

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} \sim \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}.$$

Per il criterio del criterio del confronto asintotico quindi la serie converge se $\alpha + \frac{1}{2} > 1$ cioé se $\alpha > \frac{1}{2}$ e diverge se $\alpha \leq \frac{1}{2}$.