ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, a.a. 2020-2021

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

22 febbraio 2021

TEMA 1

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = 2xe^{-3x^2}.$$

(a) Determinare il dominio, il segno, eventuali simmetrie o periodicità;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

(Facoltativo: calcolare la derivata seconda di f e determinare gli intervalli di concavità e convessità e gli eventuali punti di flesso.)

(a) La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ e non è periodica. Dato che $f(-x) = -2xe^{-3(-x)^2} = -2xe^{-3x^2} = -f(x)$, la funzione è dispari. Poichè $e^{-x^2} > 0$ per ogni x si ha che $f(x) > 0$ sse $x > 0$ e $f(x) = 0$ sse $x = 0$. Vista la simmetria della funzione la studieremo per $x \geq 0$ e poi dedurremo le proprietà e il grafico completo facendo la simmetrica rispetto all'origine degli assi.

(b) La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$, quindi non ha asintoti verticali. Calcoliamo i limiti a $+\infty$, e $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} 2xe^{-3x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^{3x^2}} = 0$$

per la scala degli infiniti. Analogamente, dalla simmetria della f si ha

$$\lim_{x\to-\infty} 2xe^{-3x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^{3x^2}} = 0$$

Quindi la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$

(c) La funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$. Calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = 2e^{-3x^2} + 2xe^{-3x^2}(-6x) = 2e^{-3x^2}(1 - 6x^2)$$

La funzione è derivabile su tutto $\mathbb{R}$. I due punti critici sono $x = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$. Inoltre $f'(x) > 0$ se e solo se $1 - 6x^2 > 0$ cioè se e solo se $|x| < \frac{\sqrt{6}}{6}$.

Dunque f è crescente in $(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6})$ e decrescente altrimenti. $x = \frac{\sqrt{6}}{6}$ è punto di massimo locale e $x = -\frac{\sqrt{6}}{6}$ è punto di minimo locale. Poiché f ha asintoti orizzontali in $y = 0$ per $x \to \pm\infty$ ed è derivabile su tutto $\mathbb{R}$, $x = \frac{\sqrt{6}}{6}$ è un punto di massimo globale e $x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$ è un punto di minimo globale. $f(\frac{\sqrt{6}}{6}) = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{e}}$ è il massimo globale e $-\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{e}}$ è il minimo globale.

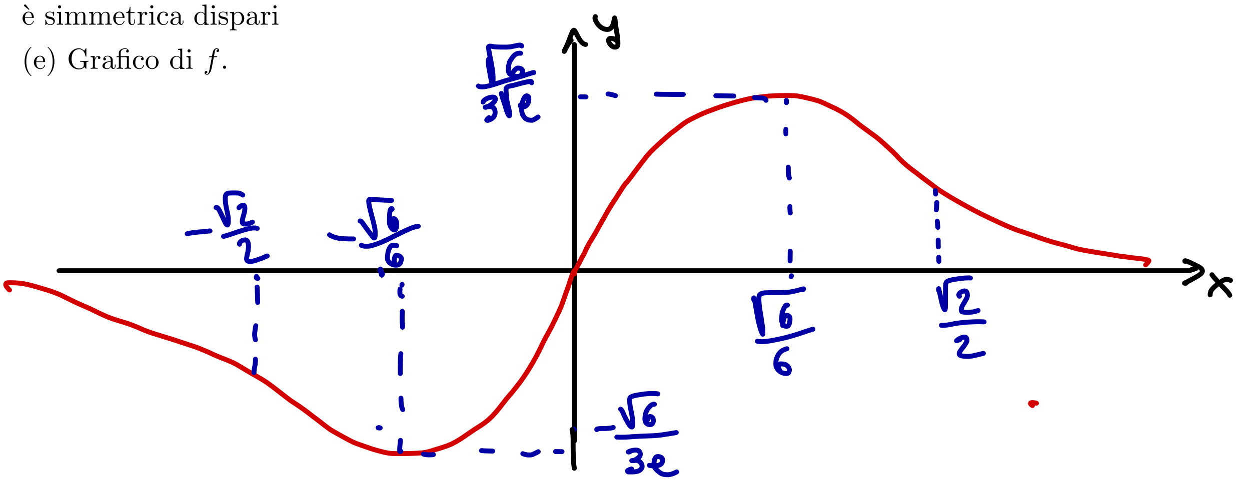
Non ci sono limiti significativi di f' perché f è ovunque derivabile.

Facoltativo Calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = 2e^{-3x^2}(-6x)(1-6x^2) + 2e^{-3x^2}(-12x) = 2e^{-3x^2}(-18x+36x^3) = e^{-3x^2}\overset{32}{\cancel{18}}x(-1+2x^2).$$

Dunque la funzione è derivabile due volte su tutto $\mathbb{R}$, inoltre per $x > 0$, $f''(x) > 0$ se e solo se $x > \sqrt{2}/2$: quindi per $x > 0 f$ è convessa per $x > \sqrt{2}/2$, concava per $x < \sqrt{2}/2$ e in $x = \sqrt{2}/2$ e $x=0$ ha un punto di flesso. Per $x < 0$ si deduce l'analoga concavità e convessità tenendo conto che f è simmetrica dispari

(e) Grafico di f.



Esercizio 2 (8 punti) Si consideri al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la successione

$$a_n = n^\alpha \left[\frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

(a) Determinare il limite $\lim_{n\to+\infty} a_n$ al variare di α.

(b) Studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ con $\alpha = 1$.

Soluzione (a) Poiché $\frac{1}{n} \to 0$ se $n \to +\infty$ possiamo scrivere lo sviluppo si McLaurin per $\sin\frac{1}{n}$ usando lo sviluppo di $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ se $x \to 0$. Si ottinene $\sin\frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o(\frac{1}{n^3})$. Quindi

$$a_n = n^\alpha \left[\frac{1}{6n^3} + o(\frac{1}{n^3})\right] = \frac{1}{6n^{3-\alpha}} + o(\frac{1}{n^{3-\alpha}}).$$

Quindi $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ se $\alpha < 3$, $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ se $\alpha > 3$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{6}$ se $\alpha = 3$

(b) Poiché la serie è a termini positivi posso utilizzare il confronto asintotico usando il risultato del punto (a) con $\alpha = 1$

$$a_n \sim \frac{1}{6n^{3-\alpha}} = \frac{1}{6n^2}.$$

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge perché è la serie armonica generalizzata con esponente 2, allora anche $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

Esercizio 3 (8 punti)
Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^2 x + 3\sin x + 2} dx.$$

Suggerimento: fare un cambio di variabile.

Soluzione
Usiamo il cambio di variabile $\sin x = t$ (e quindi $\cos x dx = dt$). L'integrale diventa

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2+3t+2} dt.$$

L'equazione $t^2+3t+2=0$ ha due soluzioni" $t=-2$ e $t=-1$, quindi $t^2+3t+2=(t+2)(t+1)$. Quindi per integrare si usa il metodo dei fratti semplici:

$$\frac{1}{t^2+3t+2} = \frac{1}{(t+2)(t+1)} = \frac{A}{(t+2)} + \frac{B}{(t+1)} = \frac{(A+B)t+A+2B}{(t+2)(t+1)}$$

Quindi dobbiamo trovare A e B tali che $A+B=0$ e $A+2B=1$, da cui si ottiene $A=-1$ e $B=1$, cioè

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2+3t+2} dt = \int_0^1 \frac{(-1)}{(t+2)} dt + \int_0^1 \frac{1}{(t+1)} dt = (\log|t+1| - \log|t+2|)|_{t=0}^{t=1}.$$

Quindi

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2+3t+2} dt = \log 2 - \log 3 + \log 2 = \log \frac{4}{3}.$$

Esercizio 4 (8 punti)
Data la funzione

$$f(x,y) = \log(x^2+1) + y^2 + xy.$$

(a) Determinare il dominio, e calcolare le derivate parziali.

(b) Dire se esiste e in caso affermativo scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(0,1,1)$.

Soluzione
(a) La funzione $f(x,y)$ è somma e composizione di funzioni definite su tutto $\mathbb{R}^2$ quindi è definita su tutto $\mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2+1} + y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + x.$$

(b) Le derivate parziali sono funzioni continue su $\mathbb{R}^2$ quindi per il terorema del differenziale totale f è differenziabile su $\mathbb{R}^2$, quindi esiste il piano tangente al grafico in ogni punto e in particolare in $(0,1,1)$. Poiché $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 2$, la sua equazione è

$$z = f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) = 1 + 1(x-0) + 2(y-1) = x + 2y - 1.$$