ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, a.a. 2020-2021

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

1 febbraio 2021, turno della mattina

TEMA 1

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = x - 2\arctan x.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità (NON è richiesto lo studio del segno di f);

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) calcolare la derivata seconda di f e determinare gli intervalli di concavità e convessità con eventuali punti di flesso.

(e) disegnare un grafico qualitativo di f.

Soluzione

(a) La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ e non è periodica. Dato che $f(-x) = -x - 2\arctan(-x) = -(x - 2\arctan x) = -f(x)$, la funzione è dispari.

(b) La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$, quindi non ha asintoti verticali. Calcoliamo i limiti a $+\infty$, e $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} x - 2\arctan x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x - 2\arctan x = -\infty.$$

La funzione non ha asintoti orizzontali. Cerco gli asintoti obliqui.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x - 2\arctan x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} - 2\frac{\arctan x}{x} = 1 = m \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x - 2\arctan x}{x} = 1 = m.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} x - 2\arctan x - x = \lim_{x\to+\infty} -2\arctan x = -2\frac{\pi}{2} = -\pi = q$$

e analogamente

$$\lim_{x\to-\infty} x - 2\arctan x - x = \pi = q.$$

Dunque $y = x - \pi$ è asintoto obliquo a $+\infty$ e $y = x + \pi$ è asintoto obliquo a $-\infty$.

(c) La funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$. Calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

La funzione è derivabile su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre $f'(x) > 0$ se e solo se $x > 1$ oppure $x < -1$. Dunque f è crescente in $(1, +\infty), (-\infty, -1)$ e decrescente in $(-1, 1)$. $x = -1$ è punto di massimo locale (ma non assoluto, dato che la funzione tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$) e $x = 1$ è punto di minimo locale (ma non assoluto, dato che la funzione tende a $-\infty$ per $x \to -\infty$).

(d) Calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{2x(x^2+1) - (x^2-1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}.$$

Dunque la funzione è derivabile due volte su tutto $\mathbb{R}$, inoltre $f''(x) > 0$ se e solo se $x > 0$: quindi f è convessa per $x > 0$, concava per $x < 0$ e in $x = 0$ ha un punto di flesso.

(e) Grafico di f.

Esercizio 2 (8 punti) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x/2} - \sqrt{1+x}}{\log(1+x) - x}.$$

Soluzione Studiamo separamente numeratore e denominatore.

$$e^{x/2} - \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2) - \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right)$$

$$= \frac{x^2}{8} + o(x^2) + \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) = \frac{x^2}{4} + o(x^2) = x^2\left(\frac{1}{4} + o(1)\right).$$

$$\log(1+x) - x = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = x^2\left(-\frac{1}{2} + o(1)\right).$$

Sostituendo nel limite abbiamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2\left(\frac{1}{4} + o(1)\right)}{x^2\left(-\frac{1}{2} + o(1)\right)} = \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

Esercizio 3 (8 punti)

1) Calcolare

$$\int \frac{x}{(3+x^2)^3} dx.$$

2) Determinare per quali α è finito l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{(3+x^2)^\alpha} dx.$$

Se possibile calcolarlo per $\alpha = 3$.

Soluzione
1) Per calcolare le primitive utilizziamo il cambio di variabile $y = 1 + x^2$ (e quindi $\frac{1}{2}dy = xdx$)

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y^3}dy = \frac{1}{2}\int y^{-3}dy = \frac{1}{2}\frac{1}{1-3}y^{1-3} + c = -\frac{1}{4}y^{-2} + c = -\frac{1}{4(x^2+1)^2} + c.$$

2) Notiamo che per $x \to +\infty$

$$\frac{x}{(3+x^2)^\alpha} = \frac{x}{(x^2)^\alpha(1+3/x^2)^\alpha} = \frac{1}{x^{2\alpha-1}(1+3/x^2)^\alpha} \sim \frac{1}{x^{2\alpha-1}}.$$

Dunque per il criterio del confronto asintotico l'integrale è finito se e solo se $2\alpha - 1 > 1$, cioé se e solo se $\alpha > 1$.

Per il calcolo dell'integrale, utilizzo il teorema fondamentale del calcolo integrale e le primitive trovate in 1)

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{(3+x^2)^3}dx = \lim_{M\to+\infty}\left[-\frac{1}{4(x^2+3)^2}\right]_1^M = \lim_{M\to+\infty} -\frac{1}{4(M^2+3)^2} + \frac{1}{64} = \frac{1}{64}.$$

Esercizio 4 (8 punti)
Determinare al variare di $a > 0$ il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a}{5} + \frac{2}{n}\right)^n.$$

Soluzione La serie è a termini positivi. Applico il criterio della radice n-esima e ho

$$\lim_n \sqrt[n]{\left(\frac{a}{5} + \frac{2}{n}\right)^n} = \lim_n \left(\frac{a}{5} + \frac{2}{n}\right) = \frac{a}{5}.$$

Se $\frac{a}{5} > 1$, cioè se $a > 5$, la serie diverge, se $\frac{a}{5} < 1$, cioè se $a < 5$, la serie converge. Se $a = 5$ il criterio non dà informazioni. In questo caso (sostituendo ad a il valore 5) la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n.$$

Notiamo che $\lim_n \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^2 \neq 0$, dunque non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza. Possiamo perciò concludere che per $a = 5$ la serie diverge (dato che non converge e che è una serie a termini positivi).

ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, a.a. 2020-2021

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

1 febbraio 2021, turno del pomeriggio

TEMA 1

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = 3x - e^x + 3.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità (NON è richiesto lo studio del segno di f);

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi.

(d) calcolare la derivata seconda di f e determinare gli intervalli di concavità e convessità con eventuali punti di flesso.

(e) disegnare un grafico qualitativo di f.

Soluzione

(a) La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$. Non è simmetrica, e non è periodica.

(b) La funzione non ha asintoti verticali. Calcoliamo i limiti a $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} 3x - e^x + 3 = \lim_{x\to+\infty} e^x \left(\frac{3x}{e^x} - 1 + \frac{3}{e^x}\right) = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} 3x - e^x + 3 = -\infty.$$

La funzione non ha asintoti orizzontali. Cerco eventuali asintoti obliqui.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x - e^x + 3}{x} = \lim_{x\to+\infty} 3 - \frac{e^x}{x} + \frac{3}{x} = -\infty$$

per confronto tra infiniti. La funzione non ha asintoti obliqui a $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x - e^x + 3}{x} = \lim_{x\to-\infty} 3 + \frac{e^x}{x} + \frac{3}{x} = 3 = m$$

$$\lim_{x\to-\infty} 3x - e^x + 3 - 3x = \lim_{x\to-\infty} -e^x + 3 = 3 = q.$$

Dunque $y = 3x + 3$ è asintoto obliquo a $-\infty$.

(c) La funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$. Calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = 3 - e^x.$$

La funzione è derivabile su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre $f'(x) > 0$ se e solo se $e^x < 3$, cioè se e solo se $x < \log 3$. Quindi f è monotona crescente in $(-\infty, \log 3)$, e monotona decrescente in $(\log 3, +\infty)$. $x = \log 3$ è un punto di massimo locale e anche assoluto (visto che la funzione tende a $-\infty$ per $x \to \pm\infty$). $f(\log 3) = 3\log 3 - 3 + 3 = 3\log 3 > 0$ è il massimo della funzione.

(d) Calcoliamo la derivata seconda di f:

$$f''(x) = -e^x.$$

Quindi la funzione è derivabile due volte su tutto $\mathbb{R}$, e $f''(x) < 0$ per ogni x. Questo implica che f è concava su tutto $\mathbb{R}$ e non ha punti di flesso.

(d) Grafico di f:

Esercizio 2 (8 punti) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + x - e^x}{\log(1+x) - 2\sqrt{1+x} + 2}.$$

Soluzione Studiamo separatamente numeratore e denominatore.

$$1 + x - e^x = 1 + x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) = x^2\left(-\frac{1}{2} + o(1)\right).$$

$$\log(1+x) - 2\sqrt{1+x} + 2 = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - 2\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right) + 2 =$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - 2 - x + \frac{1}{4}x^2 + o(x^2) + 2 = -\frac{x^2}{4} + o(x^2) = x^2\left(-\frac{1}{4} + o(1)\right).$$

Sostituendo nel limite otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(-\frac{1}{2} + o(1)\right)}{x^2\left(-\frac{1}{4} + o(1)\right)} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{4}} = 2.$$

Esercizio 3 (8 punti)

1) Calcolare

$$\int \frac{x^2}{(1+x^3)^2}dx.$$

2) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ è finito l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^3)^\alpha}dx.$$

Se possibile calcolarlo per $\alpha = 2$.

Soluzione

1) Per calcolare le primitive, utilizziamo il cambio di variabile $y = 1 + x^3$ (e quindi $\frac{1}{3}dy = x^2dx$)

$$\int \frac{x^2}{(1+x^3)^2}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{y^2}dy = \frac{1}{3}\int y^{-2}dy = \frac{1}{3}\frac{1}{1-2}y^{1-2} + c = -\frac{1}{3}y^{-1} + c = -\frac{1}{3}\frac{1}{(1+x^3)} + c.$$

2) Notiamo che per $x \to +\infty$

$$\frac{x^2}{(1+x^3)^\alpha} = \frac{x^2}{(x^3)^\alpha(1+1/x^3)^\alpha} = \frac{1}{x^{3\alpha-2}(1+1/x^3)^\alpha} \sim \frac{1}{x^{3\alpha-2}}.$$

Dunque per il criterio del confronto asintotico l'integrale è finito se e solo se $3\alpha - 2 > 1$, cioé se e solo se $\alpha > 1$.

Per calcolare l'integrale, utilizzo le primitive trovate in 1) e il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^3)^2}dx = \lim_{M\to+\infty}\left[-\frac{1}{3}\frac{1}{(1+x^3)}\right]_1^M = \lim_{M\to+\infty} -\frac{1}{3}\frac{1}{(1+M^3)} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$

Esercizio 4 (8 punti)
Determinare al variare di $a > 0$ il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n\ a^n}.$$

Soluzione

La serie è a termini positivi. Applichiamo il criterio della radice n-esima.

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{2^n}{n\ a^n}} = \lim_n \frac{2}{a\sqrt[n]{n}} = \frac{2}{a}.$$

Quindi se $\frac{2}{a} > 1$, cioè se $a < 2$ la serie diverge, mentre se $\frac{2}{a} < 1$, cioè se $a > 2$ la serie converge. Se $a = 2$ il criterio non dà informazioni. La serie in questo caso (sostituendo ad a il valore 2) diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n\ 2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

e dunque diverge, dato che coincide con la serie armonica.