ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, G. Treu, P. Mannucci, a.a. 2021-2022

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

30 giugno 2022

TEMA 1

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2}}{x-1}.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità e il segno della funzione;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) tracciare un grafico qualitativo della funzione.

Non è richiesto il calcolo della derivata seconda.

Esercizio 2 (8 punti) Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha > 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x) - \sin x}{x^\alpha}.$$

Esercizio 3 (8 punti)

1) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{x^2+3x+2}dx$$

2) Determinare se è finito l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+3x+2}dx$$

e in caso calcolarlo.

Esercizio 4 (8 punti)

Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende esclusi i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.

ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, G. Treu, P. Mannucci, a.a. 2021-2022

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

30 giugno 2022

Soluzioni

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2}}{x-1}.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità e il segno della funzione;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) tracciare un grafico qualitativo della funzione.

Non è richiesto il calcolo della derivata seconda.

Soluzione

(a) Dato che $x^2+2 \geq 2 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, la radice è sempre ben definita. Dunque $D = \{x-1 \neq 0\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. La funzione non ha simmetrie né periodicità. Infine dato che $\sqrt{2+x^2} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha che $f(x) > 0$ se $x > 1$ e $f(x) < 0$ se $x < 1$.

(b) Calcoliamo il limite in $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{2+x^2}}{x-1} = +\infty \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{2+x^2}}{x-1} = -\infty.$$

Dunque $x = 1$ è asintoto verticale destro e sinistro, e non è possibile prolungare la funzione in $x = 1$.

Calcoliamo i limiti all'infinito: dato che $\sqrt{x^2+2} = |x|\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}$ si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2+x^2}}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{x(1-1/x)} = 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2+x^2}}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{x(1-1/x)} = -1.$$

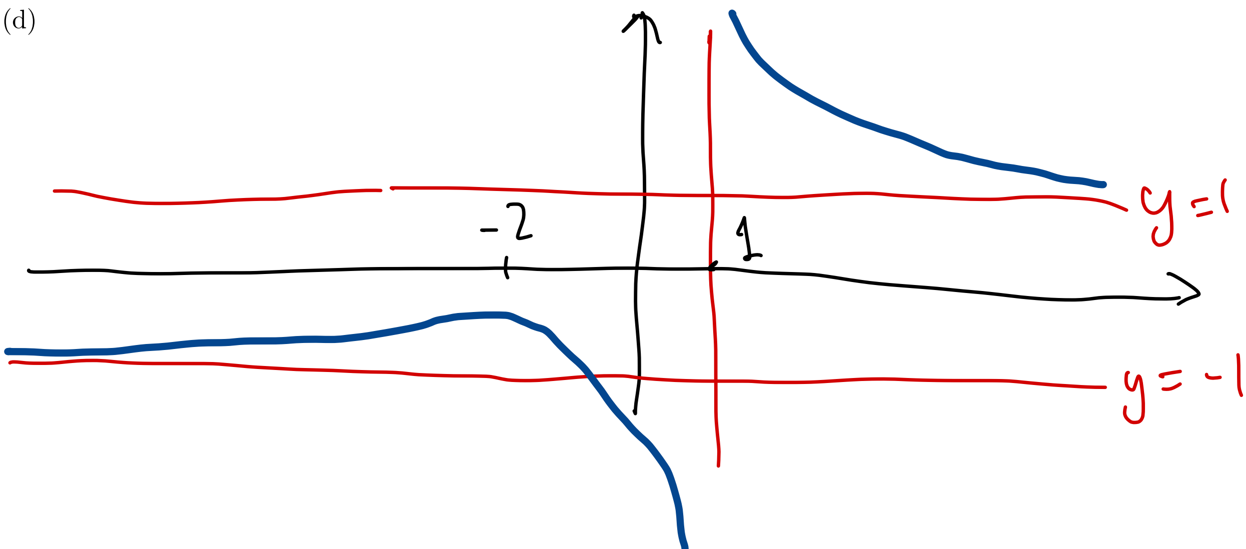
Dunque $y = 1$ è asintoto orizzontale a $+\infty$ e $y = -1$ è asintoto orizzontale a $-\infty$.

(c) La funzione è continua nel suo dominio. Calcolo la derivata:

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{2+x^2}}(x-1) - \sqrt{2+x^2}}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - x - (\sqrt{2+x^2})^2}{(x-1)^2\sqrt{2+x^2}} = \frac{-2-x}{(x-1)^2\sqrt{2+x^2}}.$$

Dunque la funzione è derivabile in tutto il suo dominio, inoltre dato che $f'(x) > 0$ se $x < -2$ e $f(x) > 0$ se $x > -2$. Dunque $x = -2$ è un punto di massimo locale non assoluto (dato che la funzione tende a $+\infty$ in $x \to 1^+$.

(d)



Esercizio 2 (8 punti) Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha > 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x) - \sin x}{x^\alpha}.$$

Soluzione Utilizziamo gli sviluppi di Taylor: per $x \to 0$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3), \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Dunque il numeratore diventa

$$\log(1+x) - \sin x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) = x^2\left(-\frac{1}{2} + o(1)\right)$$

e sostituendo nel limite otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x) - \sin x}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\left(-\frac{1}{2} + o(1)\right)}{x^\alpha} = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \alpha = 2 \\ 0 & \alpha < 2 \\ -\infty & \alpha > 2. \end{cases}$$

Esercizio 3 (8 punti)
1) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{x^2+3x+2}dx$$

2) Determinare se è finito l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+3x+2}dx$$

e in caso calcolarlo.

Soluzione 1) Utilizziamo il metodo dei fratti semplici. Dato che $x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$ riscriviamo la funzione razionale fratta come

$$\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{Ax+2A+Bx+B}{(x+1)(x+2)}.$$

Per avere l'uguaglianza devo scegliere $A = 1, B = -1$. Dunque

$$\int \frac{1}{x^2+3x+2}dx = \int \frac{1}{x+1}dx - \int \frac{1}{x+2}dx = \log|x+1| - \log|x+2| + c = \log\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + c.$$

2) Dato che

$$\frac{1}{x^2+3x+2} \sim \frac{1}{x^2} \qquad x \to +\infty$$

l'integrale è finito per il criterio di confronto asintotico. Per calcolarlo uso le primitive ottenute in 1):

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+3x+2}dx = \lim_{M\to+\infty} \int_0^M \frac{1}{x^2+3x+2}dx = \lim_{M\to+\infty} \left[\log\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\right]_0^M =$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \log\frac{M+1}{M+2} - \log\frac{1}{2} = -\log\frac{1}{2} = \log 2.$$

Esercizio 4 (8 punti)
Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

Soluzione. La serie è a termini positivi. Utilizzo il criterio del rapporto: calcoliamo

$$a_n = \frac{2^n}{n!} \qquad a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2 \cdot 2^n}{(n+1)n!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_{n+1}\frac{1}{a_n} = \frac{2 \cdot 2^n}{(n+1)n!}\frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1}.$$

Dunque

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$

Dato che il limite del rapporto è minore di 1, la serie converge.