ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni P. Mannucci G. Treu a.a. 2021-2022

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

14 febbraio 2022

TEMA 1

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \log\left(\frac{x+2}{x+1}\right).$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità (NON studiare il segno di f);

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) determinare la derivata seconda e studiare convessità e concavità di f;

(e) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 (8 punti)

(a) Calcolare il seguente limite al variare di $\in$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n \quad \frac{1}{n^2} \quad \sin\frac{1}{n^2})}{n + \log^2 n}$$

(b) Studiare il comportamento della seguente serie al variare di $\in$:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n \quad \frac{1}{n^2} \quad \sin\frac{1}{n^2})}{n + \log^2 n}.$$

Esercizio 3 (8 punti)

Calcolare l'integrale indefinito

$$\int x(1+x^2)e^{\quad x^2}\,dx.$$

Esercizio 4 (8 punti)

Data

$$f(x,y) = x^3 + y^3 \quad 3xy$$

(a) determinare il dominio e calcolare le derivate parziali;

(b) determinare i punti critici e studiarne la natura.

Soluzioni

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \log\left(\frac{x+2}{x+1}\right).$$

(a) La funzione è ben definita se l'argomento del logaritmo è positivo, cioè se $\frac{x+2}{x+1} > 0$, che corrisponde alle soluzioni $x > \ 1$ oppure $x < \ 2$. Il dominio quindi è $D = (\ \infty, \ 2) \cup (\ 1, +\infty)$. Il dominio non è simmetrico rispetto a 0 e non è periodico quindi la funzione non presenta simmetrie né periodicità.

(b) Calcoliamo i limiti a $\pm\infty$. Osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{x+2}{x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{1+2/x}{1+1/x}\right) = \log 1 = 0,$$

e analogamente per $x \to \ \infty$. Dunque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to \ \infty} f(x) = \ \infty$. Controlliamo se la funzione ammette asintoti obliqui.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2}x + \log\left(\frac{x+2}{x+1}\right)}{x} = \frac{1}{2} = \lim_{x\to \ \infty} \frac{\frac{1}{2}x + \log\left(\frac{x+2}{x+1}\right)}{x}$$

e dunque se ho un asintoto obliquo a $\pm\infty$, si ha $m = \frac{1}{2}$. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}x + \log\left(\frac{x+2}{x+1}\right) \quad \frac{1}{2}x = 0 = \lim_{x\to \ \infty} \frac{1}{2}x + \log\left(\frac{x+2}{x+1}\right) \quad \frac{1}{2}x.$$

Quindi la retta $y = \frac{1}{2}x$ è asintoto obliquo sia a $+\infty$ che a $\ \infty$.

Studiamo ora i limiti a $\ 1^+$ e $\ 2$. Dato che $\lim_{x\to \ 1)} \frac{x+2}{x+1} = +\infty$

$$\lim_{x\to \ 1)} \frac{1}{2}x + \log\left(\frac{x+2}{x+1}\right) = +\infty$$

e dato che $\lim_{x\to \ 2)} \frac{x+2}{x+1} = 0^+$

$$\lim_{x\to \ 1)} \frac{1}{2}x + \log\left(\frac{x+2}{x+1}\right) = \ \infty.$$

Dunque $x = \ 1$ è asintoto verticale destro, e $x = \ 2$ è asintoto verticale sinistro.

(c) La funzione è continua nel suo dominio. Calcoliamo la derivata di f.

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{x+1}{x+2}\frac{x+1 \quad (x+2)}{(x+1)^2} = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{x^2+3x}{2(x^2+3x+2)}.$$

La funzione è derivabile nel suo dominio. Inoltre notiamo che $x^2+3x+2 = (x+1)(x+2) > 0$ per $x \in D$ (per le condizioni di esistenza del logaritmo) e quindi $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x^2 + 3x \geq 0$, cioè se $x \geq 0$ oppure $x \leq \ 3$. La funzione è crescente in $(\ \infty, \ 3)$ e in $(0, +\infty)$ e decrescente altrove. $x = \ 3$ è un punto di massimo locale (non assoluto visto che $\sup f = +\infty$), e $x = 0$ è un punto di minimo locale (non assoluto visto che $\inf f = \ \infty$).

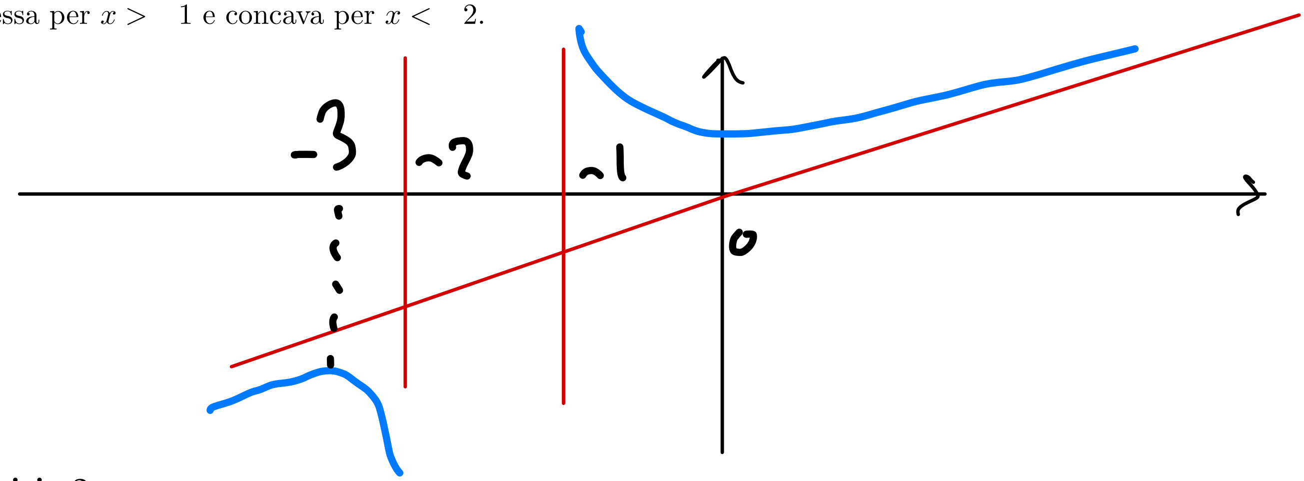
(d) Calcoliamo la derivata seconda di f.

$$f''(x) = \frac{(2x+3)2(x^2+3x+2) \quad (x^2+3x)2(2x+3)}{4(x^2+3x+2)^2} = \frac{2(2x+3)(x^2+3x+2 \quad x^2 \quad 3x)}{4(x^2+3x+2)^2} =$$

$$= \frac{2x+3}{(x^2+3x+2)^2}.$$

La funzione è derivabile due volte nel suo dominio, inoltre $f''(x) \geq 0$ se e solo se $2x+3 \geq 0$, dunque se e solo se $x \geq \quad \frac{3}{2}$. Dato che $x = \quad \frac{3}{2} \notin D$, abbiamo che f non ha punti di flesso, è convessa per $x > \quad 1$ e concava per $x < \quad 2$.

(e)



Esercizio 2

(a) Calcolare il seguente limite al variare di $\quad \in \quad$:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n \quad \frac{1}{n^2} \quad \sin \frac{1}{n^2})}{n + \log^2 n}.$$

Utilizzando il polinomio di Taylor abbiamo che

$$\frac{1}{n^2} \quad \sin \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} \quad \left(\frac{1}{n^2} \quad \frac{1}{6} \frac{1}{(n^2)^3} + o\left(\frac{1}{(n^2)^3} \right) \right) = \frac{1}{6} \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6} \right) = \frac{1}{n^6} \left(\frac{1}{6} + o(1) \right).$$

Inoltre per il confronto tra infiniti abbiamo che

$$n + \log^2 n = n \left(1 + \frac{\log^2 n}{n} \right) = n(1 + o(1)).$$

Dunque otteniamo

$$\frac{n \quad \frac{1}{n^2} \quad \sin \frac{1}{n^2})}{n + \log^2 n} = \frac{n \quad \frac{1}{n^6} \quad \frac{1}{6} + o(1))}{n(1+o(1)} = \frac{1}{n^7} \quad \frac{\frac{1}{6} + o(1)}{1 + o(1)}.$$

Passando al limite abbiamo

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^7} \quad \frac{\frac{1}{6} + o(1)}{1 + o(1)} = \begin{cases} \frac{1}{6} & \quad = 7 \\ 0 & \quad < 7 \\ +\infty & \quad > 7. \end{cases}$$

(b) Studiare il comportamento della seguente serie al variare di $\quad\in\quad$:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n \quad \frac{1}{n^2} \quad \sin\frac{1}{n^2})}{n+\log^2 n}.$$

Per quanto visto al punto a) abbiamo che

$$\frac{n \quad \frac{1}{n^2} \quad \sin\frac{1}{n^2})}{n+\log^2 n} \sim \frac{1}{n^7 \quad}.$$

Dunque per il criterio del confronto asintotico ho che la serie converge se $7 \quad > 1$, cioè $\quad < 6$, e diverge se $7 \quad \leq 1$, cioè se $\quad \geq 6$.

Esercizio 3
Calcolare l'integrale indefinito

$$\int x(1+x^2)e^{\ x^2}dx.$$

Operiamo il cambio di variabile $y = x^2$ e abbiamo $dy = 2xdx$. Sostituendo nell'integrale otteniamo

$$\int x(1+x^2)e^{\ x^2}dx = \frac{1}{2}\int(1+y)e^{\ y}dy.$$

Ora procediamo integrando per parti e abbiamo

$$\frac{1}{2}\int(1+y)e^{\ y}dy = \frac{1}{2}(1+y)(\quad e^{\ y}) \quad \frac{1}{2}\int 1(\quad e^{\ y})dy = \quad \frac{1}{2}(1+y)e^{\ y} \quad \frac{1}{2}e^{\ y} + c.$$

Dunque tornando alla variabile x otteniamo

$$\int x(1+x^2)e^{\ x^2}dx = \quad \frac{1}{2}(1+x^2)e^{\ x^2} \quad \frac{1}{2}e^{\ x^2} + c.$$

Esercizio 4
Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x^3 + y^3 \quad 3xy.$$

(a) La funzione è ben definita in tutto $\ ^2$.
Inoltre $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_x(x,y) = 3x^2 \quad 3y$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_y(x,y) = 3y^2 \quad 3x$.

(b) Notiamo che la funzione è di erenziabile in $\ ^2$. Per determinare i punti critici risolvo il sistema

$$\begin{cases} 3x^2 \quad 3y = 0 \\ 3y^2 \quad 3x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x^2 \\ (x^2)^2 \quad x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x^2 \\ x(x \quad 1)(x^2+x+1) = 0 \end{cases}$$

Le uniche soluzioni del sistema sono $(1,1)$ e $(0,0)$, e questi sono quindi i punti critici della funzione.

Per studiare il carattere di questi punti critici utilizzo il criterio dell'hessiana. Calcoliamo le derivate seconde $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = f_{xx}(x,y) = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = f_{xy}(x,y) = \quad 3 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = f_{yx}(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = f_{yy}(x,y) = 3y$ e otteniamo la matrice hessiana:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 6y \end{pmatrix}.$$

Dato che

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

ha determinante negativo, il punto $(0,0)$ è un punto di sella. Invece la matrice

$$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

ha determinante positivo e traccia positiva, dunque $(1,1)$ è un punto di minimo locale.