ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, G. Treu, P. Mannucci, a.a. 2021-2022

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

12 settembre 2022

TEMA 1

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x}{\log x - 1}.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità e il segno della funzione;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) tracciare un grafico qualitativo della funzione.

Non è richiesto il calcolo della derivata seconda.

Esercizio 2 (8 punti) 1) Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \left(e^{\frac{1}{n^2}} + 2\cos\frac{1}{n} - 3\right).$$

2) Dire per quali $\alpha > 0$ è convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \left|e^{\frac{1}{n^2}} + 2\cos\frac{1}{n} - 3\right|.$$

Esercizio 3 (8 punti)

1) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{(\arctan x)^2 + 2}{1 + x^2} dx.$$

2) Determinare se è finito l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\arctan x)^2 + 2}{1 + x^2} dx$$

e in caso calcolarlo.

Esercizio 4 (8 punti)

Determinare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = x^2 - 3xy^2 + 2y^2$$

e studiarne la natura.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, G. Treu, P. Mannucci, a.a. 2021-2022

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

12 settembre 2022

Soluzioni

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x}{\log x - 1}.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità e il segno della funzione;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) tracciare un grafico qualitativo della funzione.

Non è richiesto il calcolo della derivata seconda.

Soluzione

(a) Prima di tutto perché sia definito il logaritmo è necessario che $x > 0$. Inoltre perché il denominatore sia diverso da 0 devo imporre $\log x \neq 1$, cioé $x \neq e$. Dunque il dominio è dato da $(0, e) \cup (e, +\infty)$. La funzione non ha simmetrie né periodicità. Per il segno, osserviamo che il numeratore è sempre positivo nel dominio, dunque $f(x) > 0$ se e solo se $\log x > 1$, quindi se e solo se $x > e$.

(b) Calcoliamo il limite in $x = 0^+$: ricordando che $\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$ abbiamo che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\log x - 1} = 0$$

e dunque posso estendere per continuità la funzione in 0 ponendo $f(0) = 0$.

Calcoliamo il limite in $x = e$:

$$\lim_{x\to e^+} \frac{x}{\log x - 1} = +\infty \qquad \lim_{x\to e^-} \frac{x}{\log x - 1} = -\infty.$$

Dunque $x = e$ è asintoto verticale destro e sinistro, e non è possibile prolungare la funzione in $x = e$.

Calcoliamo il limite a $+\infty$: dato che l'infinito polinomiale è più forte dell'infinito logaritmico si ha che

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\log x - 1} = +\infty.$$

Dunque la funzione non ha asintoti orizzontali. Cerco un eventuale asintoto obliquo.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\log x - 1} = 0.$$

Dunque la funzione non ha asintoto obliquo.

(c) La funzione è continua nel suo dominio. Calcolo la derivata:

$$f'(x) = \frac{\log x - 1 - x\frac{1}{x}}{(\log x - 1)^2} = \frac{\log x - 2}{(\log x - 1)^2}.$$

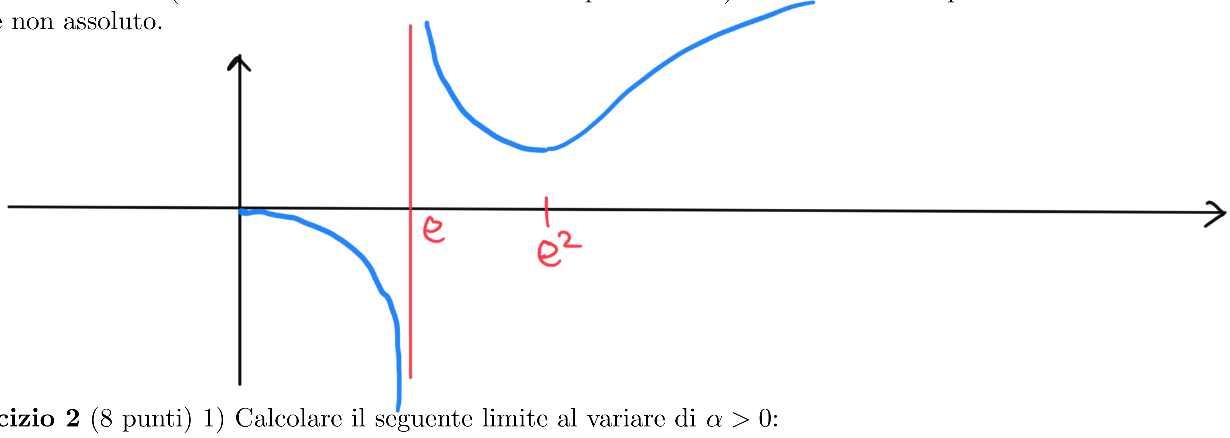
Calcoliamo il limite della derivata in 0^+:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x - 2}{(\log x - 1)^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \frac{2}{\log x}}{\log x(1 - \frac{1}{\log x})^2} = 0.$$

Dunque la funzione è derivabile nel suo dominio e in $x = 0$ ha tangente orizzontale.

Studiamo il segno della derivata: $f'(x) > 0$ se e solo se $\log x > 2$, se e solo se $x > e^2$. Dunque la funzione è crescente in $(e^2, +\infty)$, e decrescente in $(0, e)$, e in (e, e^2). Il punto $x = e^2$ è un punto di minimo locale non assoluto (visto che la funzione tende a $-\infty$ per $x \to e^-$). In $x = 0$ ha un punto di massimo locale non assoluto.

(d)



Esercizio 2 (8 punti) 1) Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \left(e^{\frac{1}{n^2}} + 2\cos\frac{1}{n} - 3\right).$$

2) Dire per quali $\alpha > 0$ è convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \left|e^{\frac{1}{n^2}} + 2\cos\frac{1}{n} - 3\right|.$$

Soluzione 1) Visto che $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2} \to 0$, utilizziamo gli sviluppi di Taylor:

$$e^{\frac{1}{n^2}} = 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$2\cos\frac{1}{n} = 2\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{1}{n}\right)^4 + o\left(\frac{1}{n}\right)^4\right) = 2 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{12}\frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Sostituendo otteniamo:

$$n^\alpha\left(e^{\frac{1}{n^2}} + 2\cos\frac{1}{n} - 3\right) = n^\alpha\left(1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) + 2 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{12}\frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) - 3\right)$$

$$= n^\alpha\left(\frac{7}{12}\frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) = n^{\alpha-4}\left(\frac{7}{12} + o(1)\right).$$

Calcoliamo il limite e abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha\left(e^{\frac{1}{n^2}} + 2\cos\frac{1}{n} - 3\right) = \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-4}\left(\frac{7}{12} + o(1)\right) = \begin{cases} = \frac{7}{12} & \text{se } \alpha = 4 \\ = +\infty & \text{se } \alpha > 4 \\ = 0 & \text{se } \alpha < 4. \end{cases}$$

2) La serie è a termini positivi e posso utilizzare il criterio del confronto asintotico. Per 1) abbiamo che

$$n^\alpha\left|e^{\frac{1}{n^2}} + 2\cos\frac{1}{n} - 3\right| \sim n^{\alpha-4} = \frac{1}{n^{4-\alpha}}.$$

Dunque per il criterio del confronto asintotico la serie converge se e solo se $4 - \alpha > 1$ cioé se $\alpha < 5$.

Esercizio 3 (8 punti)
1) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{(\arctan x)^2 + 2}{1 + x^2} dx.$$

2) Determinare se è finito l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\arctan x)^2 + 2}{1 + x^2} dx$$

e in caso calcolarlo.
Soluzione 1) Osserviamo che la derivata di $\arctan x$ è proprio $\frac{1}{1+x^2}$. Applichiamo quindi il cambio di variabile $y = \arctan x$ e abbiamo che $dy = \frac{1}{1+x^2} dx$. Sostituendo nell'integrale abbiamo

$$\int \frac{(\arctan x)^2 + 2}{1 + x^2} dx = \int (y^2 + 2) dy = \frac{y^3}{3} + 2y + c = \frac{(\arctan x)^3}{3} + 2 \arctan x + c.$$

2) Dato che

$$\frac{(\arctan x)^2 + 2}{1 + x^2} \sim \frac{1}{x^2} \qquad x \to +\infty$$

l'integrale è finito per il criterio di confronto asintotico. Per calcolarlo uso le primitive ottenute in 1):

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\arctan x)^2 + 2}{1 + x^2} dx = \lim_{M \to +\infty} \int_0^M \frac{(\arctan x)^2 + 2}{1 + x^2} dx = \lim_{M \to +\infty} \left[\frac{(\arctan x)^3}{3} + 2 \arctan x \right]_0^M =$$

$$= \lim_{M \to +\infty} \frac{(\arctan M)^3}{3} + 2 \arctan M = \frac{\pi^3}{24} + \pi.$$

Esercizio 4 (8 punti)
Determinare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = x^2 - 3xy^2 + 2y^2$$

e studiarne la natura.
Soluzione. La funzione è continua e differenziabile in tutti i punti di $\mathbb{R}^2$. Calcoliamo le derivate parziali:

$$f_x(x, y) = 2x - 3y^2 \qquad f_y(x, y) = -6xy + 4y.$$

Per determinare i punti critici dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y^2 = 0 \\ -6xy + 4y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{3}{2} y^2 \\ 2y(2 - 3x) = 0 \end{cases} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{3}{2} y^2 \\ x = \frac{2}{3}. \end{cases} \end{array} \right. \qquad \begin{cases} y^2 = \frac{4}{9} \\ x = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono $(0, 0)$, $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, e quindi sono anche i punti critici della funzione.

Per studiarne la natura applichiamo il criterio dell'hessiana. Prima di tutto calcoliamo la matrice hessiana utilizzando le derivate seconde: $f_{xx}(x, y) = 2$, $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = -6y$, e $f_{yy}(x, y) = -6x + 4$. Dunque la matrice hessiana è:

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -6y \\ -6y & -6x + 4 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo la matrice hessiana dei punti critici:

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

È una matrice definita positiva, quindi $(0,0)$ è un punto di minimo locale.

$$Hf\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il determinante è negativo, quindi la matrice è indefinita e il punto $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ è di sella.

$$Hf\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il determinante è negativo, quindi la matrice è indefinita e il punto $\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$ è di sella.