ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, G.Treu a.a. 2021-2022

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

15 luglio 2022

TEMA 1

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2(\log x - 1)$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità e il segno della funzione;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) calcolare la derivata seconda di f e determinare gli intervalli di concavità e convessità con eventuali punti di flesso.

(e) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 (8 punti) Calcolare al variare di $\alpha > 0$ il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1 - \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n - \arctan n + \log n}.$$

Esercizio 3 (8 punti)

(a) Calcolare l'integrale indefinito:

$$\int xe^{-2x}dx.$$

(b) Dire se è finito e in caso calcolare l'integrale

$$\int_0^{+\infty} xe^{-2x}dx.$$

Esercizio 4 (8 punti)

Si consideri la funzione

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + y^3.$$

(1) Determinare le derivate parziali e la matrice hessiana di f.

(2) Trovare i punti critici di f e determinarne la natura.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende esclusi i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.

ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, G. Treu a.a. 2021-2022

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

15 luglio 2022

Soluzioni

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2(\log x - 1).$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità e il segno della funzione;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) calcolare la derivata seconda di f e determinare gli intervalli di concavità e convessità con eventuali punti di flesso.

(e) disegnare un grafico qualitativo di f.

Soluzione

(a) Dato che il logaritmo è definito solo per $x > 0$, il dominio della funzione è $(0, +\infty)$. La funzione dunque non ha simmetrie né periodicità. Inoltre dato che $x^2 \geq 0$ si ha che $f(x) \geq 0$ se e solo se $\log x - 1 \geq 0$, quindi se e solo se $x \geq e$.

(b) Calcoliamo il limite per $x \to 0^+$: per una conseguenza del confronto tra infiniti si ha che $\lim_{x\to 0^+} x^2 \log x = 0$. Dunque $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ ed è possibile estendere per continuità la funzione in $x = 0$ ponendo $f(0) = 0$. Inoltre $\lim_{x\to+\infty} x^2(\log x - 1) = +\infty$ e anche $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(\log x-1)}{x} = +\infty$. Dunque la funzione non ha asintoti orizzontali né obliqui a $+\infty$.

(c) La funzione è continua nel suo dominio esteso $[0, +\infty)$. Calcoliamo la derivata prima per $x > 0$:

$$f'(x) = 2x(\log x - 1) + x^2 \frac{1}{x} = x(2 \log x - 2 + 1) = x(2 \log x - 1).$$

Si ha che $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$. Quindi la funzione è derivabile in ogni punto del dominio.

Studiamo il segno della derivata prima: $f'(x) \geq 0$ se e solo se $2 \log x - 1 \geq 0$ (dato che $x \geq 0$ nel dominio di f). Risolvendo $\log x \geq \frac{1}{2} = \log e^{\frac{1}{2}}$ si ha che $f'(x) \geq 0$ se $x \geq e^{\frac{1}{2}}$. Dunque la funzione è decrescente in $(0, e^{\frac{1}{2}})$ e crescente in $(e^{\frac{1}{2}}, +\infty)$. Il punto $x = 0$ è un punto di massimo locale non assoluto (dato che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$), mentre il punto $x = e^{\frac{1}{2}}$ è un punto di minimo locale e assoluto per la funzione.

(d) Calcoliamo $f''(x) = 2 \log x - 1 + x\frac{2}{x} = 2 \log x + 1$. Dunque la funzione è derivabile due volte in $(0, +\infty)$. Calcoliamo il segno di f'': $f''(x) \geq 0$ se e solo se $\log x \geq -\frac{1}{2} = \log e^{-\frac{1}{2}}$. Dunque la funzione è concava in $(0, e^{-\frac{1}{2}})$ e convessa in $(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$.

(e) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 (8 punti) Calcolare al variare di $\alpha > 0$ il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1 - \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n - \arctan n + \log n}.$$

Soluzione Studiamo separatamente numeratore e denominatore. Al numeratore, dato che $\frac{1}{n} \to 0$ possiamo sostituire alla funzioni coinvolte i loro polinomi di Taylor in 0. Abbiamo dunque

$$e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3!n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \qquad \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{3!n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Il numeratore diventa

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{n}} - 1 - \sin\left(\frac{1}{n}\right) &= 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{2n^2}(1 + o(1)). \end{aligned}$$

Al denominatore abbiamo $n, \log n \to +\infty$ e $\arctan n \to \frac{\pi}{2}$, raccogliamo quindi il termine di ordine maggiore:

$$n - \arctan n + \log n = n\left(1 - \frac{\arctan n}{n} + \frac{\log n}{n}\right) = n(1 + o(1)).$$

Esercizio 4 (8 punti)
Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + y^3.$$

(1) Determinare le derivate parziali e la matrice hessiana di f.

(2) Trovare i punti critici di f e determinarne la natura.

Soluzione

(1) $f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 2x - 2y$ e $f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = -2x + 3y^2$. Calcoliamo la matrice hessiana di f:

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix}.$$

(2) La funzione è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$. I punti critici sono quindi le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2x + 3y^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y \\ -2y + 3y^2 = 0 \end{cases} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = y \\ y = \frac{2}{3}. \end{cases} \end{array} \right.$$

I punti critici sono $(0,0)$ e $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Per studiare la natura dei punti critici applichiamo il criterio dell'hessiana.

$$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad D^2 f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dato che $D^2 f(0,0)$ è una matrice indefinita (ha determinante negativo), il punto $(0,0)$ è un punto di sella. Invece, $D^2 f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ha determinante positivo e traccia positiva, dunque ha autovalori positivi, e quindi il punto $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ è un punto di minimo locale per f.