ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni P. Mannucci G. Treu a.a. 2021-2022

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

24 gennaio 2022

TEMA 1

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan((x^2 \quad 5)e^x).$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità e il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se signi cativi;

(d) disegnare un gra co qualitativo di f.

Esercizio 2 (8 punti) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} + \cos x \quad 2}{2x^5 \log x + x^4}$$

Esercizio 3 (8 punti)

(a) Calcolare l'integrale inde nito

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}(x+\sqrt{x} \quad 2)} dx.$$

(b) Determinare per quali $\quad \in \quad$ è nito l'integrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{2x \quad (x+\sqrt{x} \quad 2)} dx.$$

Se possibile calcolarlo per $\quad = \frac{1}{2}$.

Esercizio 4 (8 punti)

Studiare al variare di $a \in \quad$ la convergenza semplice e assoluta della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{n+1}}{n3^n}.$$

Tempo: due ore. Viene corretto solo cio che e scritto sul foglio intestato. E vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Soluzioni 1

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan((x^2 \quad 5)e^x).$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità e il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se signi cativi;

(d) disegnare un gra co qualitativo di f.

Soluzione

(a) La funzione è de nita su tutto , non è simmetrica, né periodica. Inoltre $\arctan((x^2 \quad 5)e^x) \geq 0$ se e solo se $(x^2 \quad 5)e^x \geq 0$ e quindi se e solo se $x \geq \sqrt{5}$ oppure $x \leq \quad \sqrt{5}$.

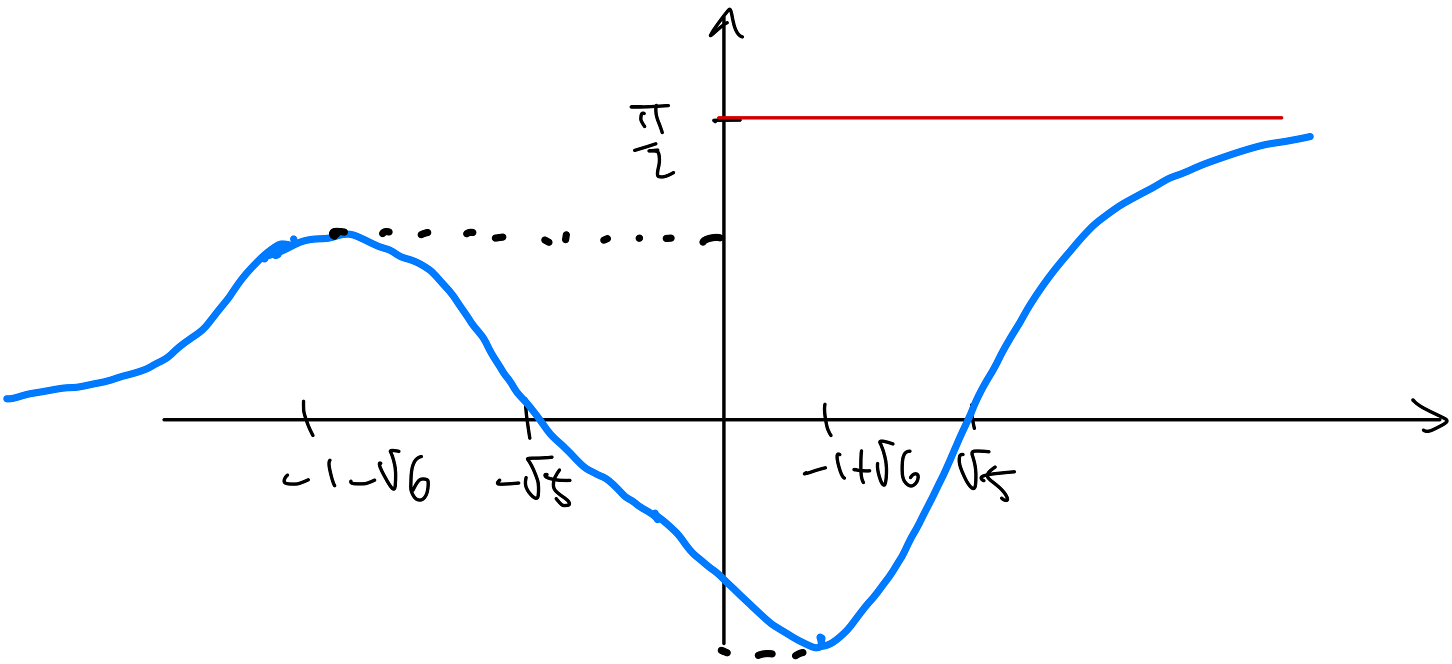
(b) Osserviamo che $\lim_{x \to \quad \infty}(x^2 \quad 5)e^x = 0$ per confronto tra in niti, dunque $\lim_{x \to \quad \infty} \arctan((x^2 \quad 5)e^x) = 0$. La retta $y = 0$ è asintoto orizzontale a $\quad \infty$.
Inoltre dato che $\lim_{x \to +\infty}(x^2 \quad 5)e^x = +\infty$, si ha che $\lim_{x \to +\infty} \arctan((x^2 \quad 5)e^x) = \frac{\pi}{2}$. La retta $y = \frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale a $+\infty$.

(c) La funzione è continua sul suo dominio. Calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (x^2 \quad 5)^2 e^{2x}}(2xe^x + (x^2 \quad 5)e^x) = \frac{e^x(x^2 + 2x \quad 5)}{1 + (x^2 \quad 5)^2 e^{2x}}.$$

La funzione è derivabile nel suo dominio. Inoltre $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x^2 + 2x \quad 5 \geq 0$, dunque se e solo se $x \geq \quad 1 + \sqrt{6}$ oppure $x \leq \quad 1 \quad \sqrt{6}$. La funzione è crescente in $(\quad \infty, \quad 1 \quad \sqrt{6})$ e in $(\quad 1 + \sqrt{6}, +\infty)$ e decrescente altrove. $x = \quad 1 \quad \sqrt{6}$ è un punto di massimo locale non assoluto (dato che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} = \sup f$) mentre $x = \quad 1 + \sqrt{6}$ è un punto di minimo locale e anche assoluto.

(d) disegnare un gra co qualitativo di f.



Esercizio 2 (8 punti) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}+\cos x - 2}{2x^5\log x + x^4}$$

Soluzione

Determiniamo l'ordine di infinitesimo del numeratore con i polinomi di Taylor:

$$\sqrt{1+x^2} = 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{(x^2)^2}{2}+o(x^2)^2 = 1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4),$$

$$\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4) = 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4).$$

Dunque otteniamo

$$\sqrt{1+x^2}+\cos x-2 = 1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)+1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)-2 = -\frac{2}{24}x^4+o(x^4) = x^4\left(-\frac{1}{12}+o(1)\right).$$

Per quanto riguarda il denonimatore, ricordando che $\lim_{x\to 0} x^k \log x = 0$ per ogni $k > 0$, otteniamo

$$2x^5\log x + x^4 = x^4(2x\log x+1) = x^4(1+o(1)).$$

Sostituendo nel limite otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}+\cos x - 2}{2x^5\log x + x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4\left(-\frac{1}{12}+o(1)\right)}{x^4(1+o(1))} = -\frac{1}{12}.$$

Esercizio 3 (8 punti)

(a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}(x+\sqrt{x}-2)}dx.$$

(b) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ è finito l'integrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{2x^{\alpha}(x+\sqrt{x}-2)}dx.$$

Se possibile calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Soluzione

(a) Operiamo il cambio di variabile $y=\sqrt{x}$ e otteniamo $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$. Sostituendo nell'integrale otteniamo

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}(x+\sqrt{x}-2)}dx = \int \frac{1}{y^2+y-2}dy.$$

Applichiamo il metodo dei fratti semplici: $y^2+y-2=(y-1)(y+2)$ e scriviamo

$$\frac{1}{y^2+y-2} = \frac{A}{y-1}+\frac{B}{y+2} = \frac{(A+B)y+2A-B}{(y-1)(y+2)}.$$

Risolvendo il sistema $\begin{cases} A+B=0 \\ 2A-B=1 \end{cases}$, otteniamo $A=\frac{1}{3}$ e $B=-\frac{1}{3}$. Dunque

$$\int \frac{1}{y^2+y-2}dy = \frac{1}{3}\int\frac{1}{y-1}dy - \frac{1}{3}\int\frac{1}{y+2}dy = \frac{1}{3}\log|y-1| - \frac{1}{3}\log|y+2|+c = \frac{1}{3}\log\frac{|y-1|}{|y+2|}+c.$$

Tornando alla variabile x abbiamo

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}(x+\sqrt{x} \quad 2)}dx = \frac{1}{3}\log\frac{|\sqrt{x} \quad 1|}{|\sqrt{x}+2|} + c.$$

(b) Notiamo che per $x \to +\infty$,

$$\frac{1}{2x \quad (x+\sqrt{x} \quad 2)} = \frac{1}{2x \quad x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}} \quad \frac{2}{x}\right)} \sim \frac{1}{x \quad +1}.$$

Dunque per il criterio del confronto asintotico otteniamo che l'integrale è nito se e solo se $\ + 1 > 1$, cioè se e solo se $\ > 0$.

Se $\ = \frac{1}{2}$ l'integrale è nito, e otteniamo, ricordando il teorema fondamentale del calcolo integrale e le primitive calcolate nel punto a),

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}(x+\sqrt{x} \quad 2)}dx = \lim_{M\to+\infty}\left[\frac{1}{3}\log\frac{|\sqrt{x} \quad 1|}{|\sqrt{x}+2|}\right]_2^M =$$

$$= \lim_{M\to+\infty}\frac{1}{3}\log\frac{\sqrt{M} \quad 1}{\sqrt{M}+2} \quad \frac{1}{3}\log\frac{\sqrt{2} \quad 1}{\sqrt{2}+2} = \quad \frac{1}{3}\log\frac{\sqrt{2} \quad 1}{\sqrt{2}+2}.$$

Esercizio 4 (8 punti)
Studiare al variare di $a \in$ la convergenza semplice e assoluta della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^{n+1}}{n3^n}.$$

Soluzione Studiamo prima la convergenza assoluta, quindi la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|a|^{n \quad 1}}{n3^n}$. Applichiamo il criterio della radice n esima e otteniamo

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{|a|^{n+1}}{n3^n}} = \lim_n \frac{|a|^{\frac{n \quad 1}{n}}}{\sqrt[n]{n}3} = \frac{|a|}{3}.$$

Dunque se $|a| < 3$ la serie converge assolutamente, se $|a| > 3$ la serie diverge assolutamente. Se $|a| = 3$ il criterio non dà informazioni, ma sostituendo nella serie ottengo

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^{n+1}}{n3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{n} = 3\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$$

che quindi diverge.

Riassumendo la serie converge assolutamente per $\quad 3 < a < 3$ e diverge assolutamente per $a \geq 3$ e per $a \leq \quad 3$.

Consideriamo ora la convergenza semplice. Sappiamo che per $\quad 3 < a < 3$ la serie converge anche semplicemente. Inoltre per $|a| > 3$ si ha che $\lim_n a_n = \frac{a\left(\frac{a}{3}\right)^n}{n} \neq 0$, e dunque la serie non converge perché non è soddisfatta la condizione necessaria di convergenza della serie. Se $a = 3$ sostituendo nella serie ottengo $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^{n \quad 1}}{n3^n} = 3\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$, che quindi diverge. Se $a = \quad 3$ sostituendo nella serie ottengo $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\quad 3)^{n \quad 1}}{n3^n} = (\quad 3)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\quad 1)^n}{n}$, che converge per il criterio di Leibniz.

Riassumendo la serie converge semplicemente per $\quad 3 \leq a < 3$ e non converge per $a \geq 3$ (in questo caso diverge, dato che la serie è a termini positivi) e per $a < \quad 3$.