ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, a.a. 2022-2023

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

12 settembre 2023

TEMA 1

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = xe^{-x^2}.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità e segno;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 (8 punti) (a) Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right).$$

(b) Dire per quali α converge la serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right).$$

Esercizio 3 (8 punti)

(a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{x^2+3x+2}dx.$$

(b) Dire se l'integrale generalizzato

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+3x+2}dx$$

è finito e in caso calcolarlo.

Esercizio 4 (8 punti)

Determinare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = x^2 - 3xy$$

e studiarne la natura.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, a.a. 2022-2023
Corsi di laurea in Scienze Statistiche

12 settembre 2023

SOLUZIONI

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = xe^{-x^2}.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità e segno;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Soluzione (a) Il dominio è tutto $\mathbb{R}$. Inoltre dato che $f(-x) = -xe^{-(-x)^2} = -xe^{-x^2} = -f(x)$ la funzione è dispari (quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi). Poiché $e^{-x^2} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ la funzione è positiva per ogni $x > 0$ e negativa per ogni $x < 0$. Inoltre $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

(b) Calcoliamo i limiti a $\pm\infty$. Poiché la funzione è dispari calcoliamo solo il limite per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = 0,$$

per la scala degli infiniti. Dunque $y = 0$ è asintoto orizzontale a $+\infty$, (e anche a $-\infty$).

(c) La funzione è continua e derivabile nel suo dominio, in quanto prodotto e composizione di funzioni continue e derivabili. Calcoliamo la derivata di f come derivata di un prodotto:

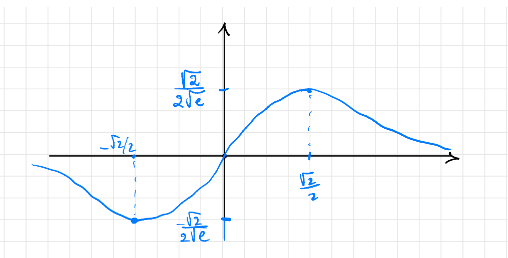
$$f'(x) = e^{-x^2} + xe^{-x^2}(-2x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$$

Troviamo i punti critici risolvendo

$$f'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2) = 0$$

Otteniamo $1 - 2x^2 = 0$, cioè $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Studiamo il segno della derivata: $f'(x) > 0$ se e solo se $1 - 2x^2 > 0$, cioè se e solo se $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Questo implica che f è strettamente crescente in $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ e decrescente se $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Quindi il punto critico $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ è un punto di massimo locale e $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ è un punto di minimo locale. Inoltre dai limiti a $\pm\infty$ si vede che $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ è un punto di massimo globale e $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ è un punto di minimo globale. $f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-1/2}$ è il massimo globale e $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-1/2}$ è il minimo globale. Poiché la funzione è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ non ci sono limiti di f' significativi, da calcolare esplicitamente.

(d)



Esercizio 2 (8 punti) (a) Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right).$$

(b) Dire per quali α converge la serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right).$$

Soluzione (a) Dato che $\frac{1}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$, possiamo approssimare $\sin\frac{1}{n}$ con il suo polinomio di Taylor in $x = 0$. Ci fermiamo al grado 3:

$$\sin\frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Sostituendo nel limite otteniamo

$$n^\alpha \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right) = n^\alpha \left(\frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \frac{n^\alpha}{n^3}\left(\frac{1}{6} + o(1)\right) \longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{6} & \alpha = 3 \\ +\infty & \alpha > 3 \\ 0 & \alpha < 3. \end{cases}.$$

(b) Utilizziamo il criterio del confronto asintotico. Per quanto visto al punto precedente, abbiamo che

$$n^\alpha \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{6n^{3-\alpha}}.$$

Dunque la serie converge se $3 - \alpha > 1$ cioè se $\alpha < 2$, e diverge se $\alpha \geq 2$.

Esercizio 3 (8 punti)
(a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{x^2 + 3x + 2}dx.$$

(b) Dire se l'integrale generalizzato

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 3x + 2}dx$$

è finito e in caso calcolarlo.

Soluzione
(a) È l'integrale di una funzione razionale. Studiamo l'equazione $x^2 + 3x + 2 = 0$. Poiché $\Delta = 9 - 8 = 1$, l'equazione ha due soluzioni che sono $x = -1$ e $x = -2$. Quindi $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$. Usiamo quindi il metodo dei fratti semplici per integrare. Cerchiamo A e B tali che

$$\frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2}.$$

Si ottiene $1 = A(x + 2) + B(x + 1)$ e quindi dal principio di identità dei polinomi abbiamo $A + B = 0$ e $2A + B = 1$. Risolvendo il sistema, dalla prima equazione otteniamo $B = -A$

e mettendo la relazione nella seconda equazione si ottiene $A = 1$ e quindi $B = -1$. Quindi otteniamo la decomposizione in fratti semplici:

$$\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2},$$

e

$$\int \frac{1}{x^2+3x+2}dx = \int \frac{1}{x+1}dx - \int \frac{1}{x+2}dx = \log|x+1| - \log|x=2| + C = \log\frac{|x+1|}{|x+2|} + C.$$

(b) Si osserva che $\frac{1}{x^2+3x+2} \sim \frac{1}{x^2}$ se $x \to \infty$ quindi, dal criterio del confronto asintotico, l'integrale converge. Per calcolarlo, dalla definizione di integrale generalizzato, utilizzando le primitive trovate nel punto precedente abbiamo,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+3x+2}dx = \lim_{\omega\to+\infty} \int_1^{\omega} \frac{1}{x^2+3x+2}dx = \lim_{\omega\to+\infty} (\log\frac{|\omega+1|}{|\omega+2|} - \log\frac{|1+1|}{|1+2|} = -\log\frac{2}{3} = \log\frac{3}{2}$$

dove abbiamo tenuto conto che $\lim_{\omega\to+\infty}\frac{|\omega+1|}{|\omega+2|} = 1$ e $\log 1 = 0$.

Esercizio 4 (8 punti)
Determinare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = x^2 - 3xy$$

e studiarne la natura.

Soluzione
(a) Calcoliamo il gradiente di f:

$$\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = (2x - 3y, -3x).$$

(b) I punti critici sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ -3x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x = 3y \\ x = 0 \end{cases}$$

che coincidono con la coppia $(0,0)$. Per studiare la natura dei punti critici, utilizziamo il criterio dell'Hessiana. L'Hessiana di f in un punto generico è

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'Hessiana ha coefficienti costanti quindi in $(0,0)$ è sempre

$$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\det D^2 f(0,1) = -9$, è una matrice indefinita e dunque $(0,0)$ è un punto di sella.