ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, a.a. 2022-2023

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

11 luglio 2023

TEMA 1

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\sqrt{x-1}.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità e segno;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 (8 punti) Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 - \sin(x^2)}{2x^\alpha(1-\cos x)}.$$

Esercizio 3 (8 punti)
(a) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\sqrt[3]{\pi/2}} x^2 \sin(x^3)\, dx.$$

Suggerimento: Usare un opportuno cambio di variabili.

Esercizio 4 (8 punti)
Studiare la convergenza della serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^5+3}{5^n}.$$

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Soluzioni

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan \sqrt{x-1}.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità e segno;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Soluzione

(a) La funzione ha dominio $[1, +\infty)$, dato che la radice è definita solo per argomenti ≥ 0. Dato che il dominio non è simmetrico né periodico, la funzione non può avere simmetrie o periodicità. Infine dato che $\arctan y \geq 0$ per ogni $y \geq 0$, abbiamo che $f(x) \geq 0$ nel suo dominio perché $y = \sqrt{x-1} \geq 0$ per definizione.

(b) L'unico limite da calcolare è il limite a $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan \sqrt{x-1} = \pi/2$$

perché $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x-1} = +\infty$ dunque la funzione ha asintoto orizzontale a $+\infty$. La funzione è definita in $x = 1$ e $f(1) = \arctan 0 = 0$.

(c) La funzione è continua nel suo dominio. Calcolo la derivata di f:

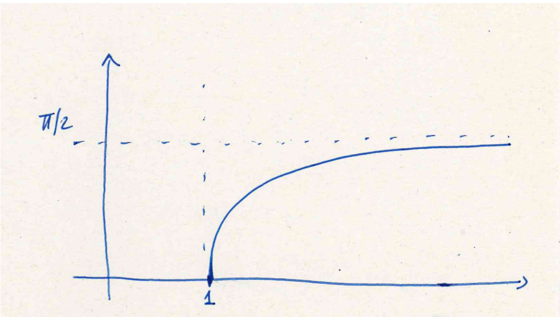
$$f'(x) = \frac{1}{1 + (\sqrt{x-1})^2} \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2x\sqrt{x-1}}.$$

La funzione è derivabile in tutti i punti del dominio tali che $x > 1$. Studio la derivabilità in $x = 1$:

$$\lim_{x\to1^+} f'(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{1}{2x\sqrt{x-1}} = +\infty.$$

Quindi in $x = 1$ la funzione non è derivabile e il grafico avrà attacco verticale.

Calcoliamo il segno della derivata. Dato che il dominio è $[1, +\infty)$ si ha che $f'(x) > 0$ per ogni punto del dominio. Quindi la funzione è strettamente crescente nel suo dominio. La monotonia si poteva studiare anche notando che la f è composizione di due funzioni strettamente crescenti e quindi strettamente crescente.

(d) 

Esercizio 2 (8 punti) Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 - \sin(x^2)}{2x^\alpha(1-\cos x)}.$$

Soluzione Utilizzando i polinomi di Taylor riscriviamo numeratore e denominatore come polinomi nella variabile x, più un resto.

$$x^2 - \sin(x^2) = x^2 - x^2 + \frac{1}{6}x^6 + o(x^6) = \frac{1}{6}x^6 + o(x^6).$$

Inoltre

$$2x^\alpha(1-\cos x) = 2x^\alpha(1 - 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)) = x^{\alpha+2} + o(x^{\alpha+2})$$

Sostituendo nel limite otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 - \sin(x^2)}{2x^\alpha(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{6}x^6 + o(x^6)}{x^{\alpha+2} + o(x^{\alpha+2})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{6}x^{6-\alpha-2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{6}x^{4-\alpha} = \begin{cases} 1/6 & \alpha = 4 \\ 0 & \alpha < 4 \\ +\infty & \alpha > 4. \end{cases}$$

Esercizio 3 (8 punti)
(a) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\sqrt[3]{\pi/2}} x^2 \sin(x^3)\, dx.$$

Suggerimento: Usare un opportuno cambio di variabili.
Soluzione Utilizziamo la sostituzione $x^3 = y$. In questo caso abbiamo formalmente $3x^2 dx = dy$. Gli estremi dell'integrale: per $x = 0$ si ha $y = 0$, per $x = \sqrt[3]{\pi/2}$ si ha $y = \pi/2$, quindi l'integrale diventa

$$\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \sin y\, dy = -\frac{1}{3}(\cos(\pi/2) - \cos 0) = \frac{1}{3}$$

Esercizio 4 (8 punti)
Studiare la convergenza della serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^5+3}{5^n}.$$

Soluzione Poiché è una serie a termini positivi, utilzziamo il criterio del rapporto e otteniamo:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^5+3}{5^{n+1}} \frac{5^n}{n^5+3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{5} \frac{(n+1)^5+3}{n^5+3} = \frac{1}{5} < 1.$$

quindi la serie converge. Abbiamo usato il fatto che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^5+3}{n^5+3} = 1.$$