ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, a.a. 2022-2023

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

21 giugno 2023

TEMA 1

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Facoltativo: calcolare la derivata seconda di f e determinare gli intervalli di concavità e convessità di f.

Esercizio 2 (8 punti) Si consideri la successione

$$a_n = n^\alpha \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n} \right).$$

(a) Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

(b) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

Esercizio 3 (8 punti)

(a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int x \log x \, dx.$$

Suggerimento: Procedere per parti.

(b) Calcolare l'integrale generalizzato

$$\int_0^1 x \log x \, dx$$

.

Esercizio 4 (8 punti)

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^3 - 3y.$$

(a) Scrivere il gradiente di f in un punto generico (x, y).

(b) Determinare i punti critici della funzione e studiarne la natura.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. Il punteggio degli esercizi si intende esclusi i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.

ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, a.a. 2022-2023

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

21 giugno 2023

SOLUZIONI

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Facoltativo: calcolare la derivata seconda di f e determinare gli intervalli di concavità e convessità di f.

Soluzione (8 punti) (a) Dato che $x^2+1 \geq 1 > 0$ per ogni x, la radice è sempre definita. Il dominio è dunque $x \neq 0$, cioè $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. La funzione non è periodica. Inoltre dato che $f(x) = -f(-x)$ la funzione è dispari (quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi).

(b) Calcoliamo i limiti in 0 e $\pm\infty$. Si ha che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = -\infty.$$

Dunque $x = 0$ è una singolarità di seconda specie, e non è possibile prolungare f per continuità in $x = 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{1+1/x^2}}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+1/x^2}}{x} = -1.$$

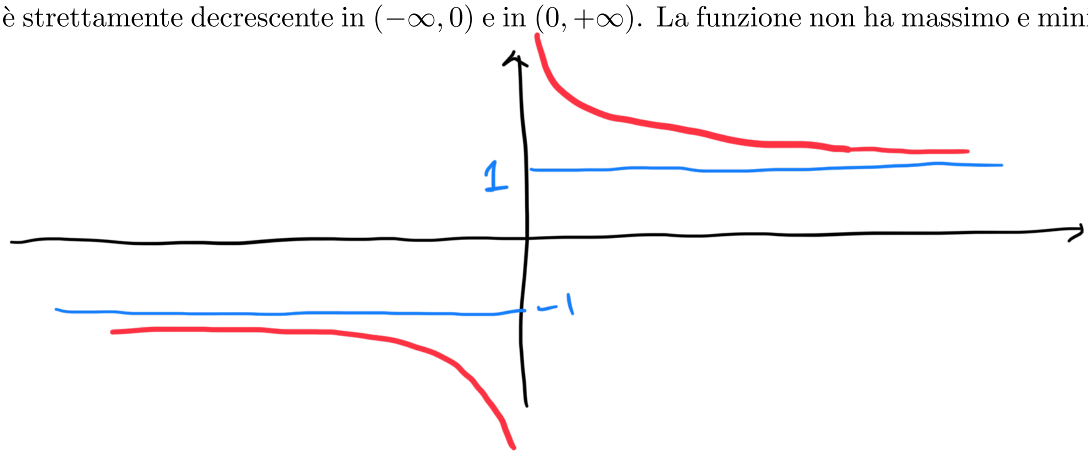
Dunque $y = 1$ è asintoto orizzontale a $+\infty$, e $y = -1$ è asintoto orizzontale a $-\infty$.

(c) La funzione è continua nel suo dominio, in quanto composizione di funzioni continue. Calcoliamo la derivata di f:

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}x - \sqrt{x^2+1}}{x^2} = \frac{x^2 - x^2 - 1}{x^2\sqrt{x^2+1}} = -\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}.$$

Dunque la funzione è derivabile su tutto il suo dominio, e la derivata è strettamente negativa. Questo implica che f è strettamente decrescente in ciascun intervallo contenuto nel suo dominio, cioè f è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$. La funzione non ha massimo e minimo.

(d)



Facoltativo: Calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{2x\sqrt{x^2+1} + x^2 \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^4(x^2+1)} = \frac{2x^3 + 2x + x^3}{x^4(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3x^2+2}{x^3(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

La funzione è derivabile due volte su tutto il suo dominio. Inoltre $f''(x) > 0$ se $x > 0$ e $f''(x) < 0$ se $x < 0$. Questo implica che f è convessa in $(0, +\infty)$ e concava in $(-\infty, 0)$.

Esercizio 2 (8 punti) Si consideri la successione

$$a_n = n^\alpha \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right).$$

(a) Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite $\lim_{n\to+\infty} a_n$.
(b) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

Soluzione (a) Dato che $\frac{1}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$, possiamo approssimare $e^{\frac{1}{n}}$ con il suo polinomio di Taylor in $x = 0$. Ci fermiamo al grado 2:

$$e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Sostituendo in a_n otteniamo

$$a_n = n^\alpha \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right) = n^\alpha \left(\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{n^\alpha}{n^2}\left(\frac{1}{2} + o(1)\right) \longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} & \alpha = 2 \\ +\infty & \alpha > 2 \\ 0 & \alpha < 2. \end{cases}.$$

(b) Utilizziamo il criterio del confronto asintotico. Abbiamo per quanto visto al punto precedente che

$$a_n \sim \frac{1}{n^{2-\alpha}}.$$

Dunque la serie converge se $2 - \alpha > 1$ cioè se $\alpha < 1$, e diverge se $\alpha \geq 1$.

Esercizio 3 (8 punti)
(a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int x \log x \, dx.$$

Suggerimento: Procedere per parti.
(b) Calcolare l'integrale generalizzato

$$\int_0^1 x \log x \, dx$$

.

Soluzione
(a) Procedendo per parti abbiamo, ricordando che una primitiva di x è $\frac{x^2}{2}$ e che la derivata di $\log x$ è $\frac{1}{x}$,

$$\int x \log x \, dx = \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{1}{4}x^2 + c.$$

(b) Dalla definizione di integrale generalizzato, utilizzando le primitive trovate nel punto precedente abbiamo, ricordando che $\log 1 = 0$ e che $\lim_{\epsilon\to 0^+} \epsilon^2 \log \epsilon = 0$ (limite notevole),

$$\int_0^1 x \log x \, dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^1 x \log x dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \left[\frac{x^2}{2}\log x - \frac{1}{4}x^2\right]_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon\to 0^+} -\frac{1}{4} - \frac{\epsilon^2}{2}\log\epsilon + \frac{\epsilon^2}{4} = -\frac{1}{4}.$$

Esercizio 4 (8 punti)
Si consideri la funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^3 - 3y.$$

(a) Scrivere il gradiente di f in un punto generico (x, y).
(b) Determinare i punti critici della funzione e studiarne la natura.

Soluzione
(a) Calcoliamo il gradiente di f:

$$\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) = (2x, 3y^2 - 3).$$

(b) I punti critici sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 1 \end{cases}$$

che coincidono con le due coppie $(0, 1)$ e $(0, -1)$. Per studiare la natura dei punti critici, utilizzo il criterio dell'hessiana. L'hessiana di f in un punto generico è

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo l'hessiana nei due punti critici. Nel caso $(0, 1)$ l'hessiana

$$D^2 f(0, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

è una matrice definita positiva (con autovalori 2,6), e dunque $(0, 1)$ è un punto di minimo locale.
Nel caso $(0, -1)$ l'hessiana

$$D^2 f(0, -1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

è una matrice indefinita (con autovalori 2,- 6), e dunque $(0, 1)$ è un punto di sella.