ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, a.a. 2022-2023

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

16 febbraio 2023

TEMA 1

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \log x - \arctan(x-1).$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità (NON è richiesto il segno di f);

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Facoltativo: dire quante sono le soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$.

Esercizio 2 (8 punti) Si consideri la successione

$$a_n = n^\alpha \frac{\sin(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}}{2n^3}.$$

1) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ $\lim_n a_n = 0$.
2) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

Esercizio 3 (8 punti)
Calcolare

$$\int_0^1 x^2 \left(\sin(x^3) - 2e^{-x^3}\right) dx$$

Esercizio 4 (8 punti)
Si consideri la funzione

$$f(x,y) = 2x^3 + y^3 - 3xy.$$

1) Scrivere il gradiente di f in un punto generico (x, y).
2) Scrivere il piano tangente al grafico di f in $(0, 1, 1)$.
3) Dire se il punto $(0, 0)$ è punto critico e studiarne la natura.

Facoltativo: trovare tutti i punti critici di $f(x, y)$.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende esclusi i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.

Soluzioni

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \log x - \arctan(x-1).$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità (NON è richiesto il segno di f);

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Facoltativo: dire quante sono le soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$.

Soluzione

(a) La funzione ha dominio $(0, +\infty)$, dato che il logaritmo è definito solo per argomenti positivi. Dato che il dominio non è simmetrico né periodico, la funzione non può avere simmetrie e periodicità.

(b) Calcolo il limite in 0^+:

$$\lim_{x\to 0^+} \log x - \arctan(x-1) = -\infty$$

perché $\log x \to -\infty$ e $\arctan(x-1) \to \arctan(-1)$.

Calcolo il limite a $+\infty$:

$$\lim_{x\to +\infty} \log x - \arctan(x-1) = -\infty$$

perché $\log x \to +\infty$ e $\arctan(x-1) \to \pi/2$ dunque la funzione non ha asintoto orizzontale. Cerco un eventuale asintoto obliquo e calcolo

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log x - \arctan(x-1)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{x} - \frac{\arctan(x-1)}{x} = 0.$$

Entrambi i termini tendono a zero, il primo per confronto tra infiniti. Quindi la funzione non ha asintoto obliquo.

(c) La funzione è continua e derivabile nel suo dominio. Calcolo la derivata di f:

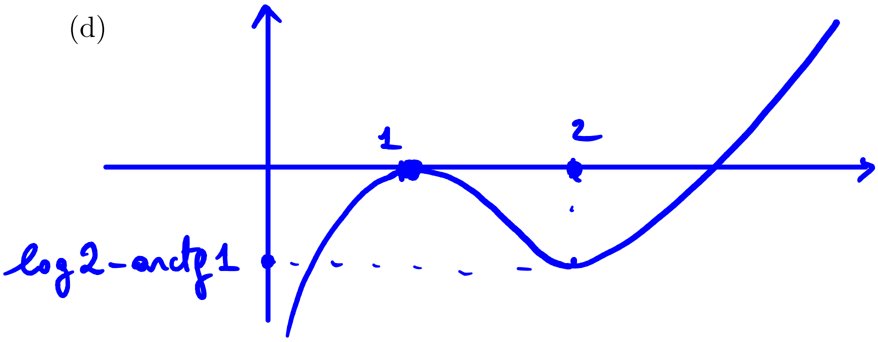
$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+(x-1)^2} = \frac{x^2-3x+2}{x(1+(x-1)^2)}$$

In questo caso non ci sono da calcolare gli attacchi, visto che il limite della f per $x \to 0^+$ non è finito.

Troviamo se ci sono punti critici per f cioè risolviamo $f'(x) = 0$. Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $x^2 - 3x + 2 = 0$ e questo è vero se $x = 1$ o $x = 2$.

Calcoliamo il segno della derivata. Dato che $x(1 + (x-1)^2) > 0$ nel dominio di f $(x > 0)$, si ha che $f'(x) > 0$ se e solo se $x^2 - 3x + 2 > 0$ cioè se e solo se $x > 2$ oppure $x < 1$. Quindi la funzione è crescente in $(0, 1)$ e $(2, +\infty)$ e è decrescente in $(1, 2)$. Il punto $x = 1$ è un punto di massimo locale, mentre il punto $x = 2$ è un punto di minimo locale. $f(1) = \log 1 - \arctan 0 = 0$. Quindi necessariamente $f(2) = \log 2 - \arctan 1 < 0$. Visti i limiti la funzione non ha massimo e minimo assoluto.

(d)



Facoltativo: Poiché $f(1) = \log 1 - \arctan 0 = 0$ la funzione interseca in due punti l'asse delle ascisse ($x = 1$ e $x_0 > 2$) quindi l'equazione $f(x) = 0$ avrà le due soluzioni $x = 1$ e $x_0 > 2$.

Esercizio 2 (8 punti) Si consideri la successione

$$a_n = n^\alpha \frac{\sin(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}}{2n^3}.$$

1) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ $\lim_n a_n = 0$.
2) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

Soluzione 1) Poiché $1/n \to 0$, utilizzando i polinomi di Taylor e riscriviamo il numeratore come polinomio nella variabile $1/n$, più un resto.

$$\sin(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o(\frac{1}{n^3}) - \frac{1}{n} = -\frac{1}{6n^3} + o(\frac{1}{n^3}).$$

Sostituendo nel limite otteniamo

$$\lim_n n^\alpha \frac{\sin(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}}{2n^3} = \lim_n n^\alpha \frac{-\frac{1}{6n^3} + o(\frac{1}{n^3})}{2n^3} =$$

$$= \lim_n n^\alpha \left(-\frac{1}{12n^6}\right) = \lim_n -\frac{1}{12n^{6-\alpha}}.$$

Quindi $\lim_n a_n = 0$ se e solo se $\alpha < 6$.
2) Dal punto 1) sappiamo che $a_n \sim -\frac{1}{12n^{6-\alpha}}$ quindi dal criterio del confronto asintotico $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se e solo se $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{6-\alpha}}$ converge cioè se e solo se $6 - \alpha > 1$ cioè $\alpha < 5$.

Esercizio 3 (8 punti)
Calcolare

$$\int_0^2 x^2 \left(\sin(x^3) - 2e^{-x^3}\right) dx$$

Soluzione Poiché la funzione da integrare contiene funzioni con argomento x^3 e a moltiplicare c'è il termine x^2, possiamo usare la sostituzione $x^3 = y$. In questo caso $3x^2 dx = dy$, quindi $x^2 dx = \frac{1}{3} dy$ e se $x = 0$ si ha $y = 0$ e se $x = 2$ si ha $y = 8$. Quindi

$$\int_0^2 x^2 \left(\sin(x^3) - 2e^{-x^3}\right) dx = \frac{1}{3} \int_0^8 \left(\sin(y) - 2e^{-y}\right) dy =$$

$$\left(-\cos y + 2e^{-y}\right)\Big|_{y=0}^{y=8} = -\cos 8 + 2e^{-8} + 1 - 2 = -\cos 8 + 2e^{-8} - 1.$$

Esercizio 4 (8 punti)
Si consideri la funzione

$$f(x) = 2x^3 + y^3 - 3xy.$$

1) Scrivere il gradiente di f in un punto generico (x, y).
2) Scrivere il piano tangente al grafico di f in $(0, 1, 1)$.
3) Dire se il punto $(0, 0)$ è punto critico e studiarne la natura.
Facoltativo: trovare tutti i punti critici di $f(x, y)$.

Soluzione 1) La funzione è definita e derivabile in ogni punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ quindi possiamo calcolare le derivate in ogni punto di $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x^2 - 3y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3x.$$

2) Poiché $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = -3$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 3$, l'equazione del piano tangente al grafico in $(0, 1, 1)$ è

$$z = f(0, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)(x) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1)(y - 1) = 1 - 3(x - 0) + 3(y - 1) = -3x + 3y - 5.$$

3) Poiché $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ allora $(0, 0)$ è punto critico per f. Scriviamo la matrice Hessiana in un punto generico e poi calcoliamola in $(0, 0)$. Si ha:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -3.$$

Quindi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = -3$$

cioè

$$D^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha che $\det D^2 f(0, 0) = -9$ quindi la matrice è indefinita e $(0, 0)$ è un punto di sella.
Facoltativo: Per trovare tutti i punti critici si deve risolvere il sistema:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x^2 - 3y = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3x = 0.$$

Dalla prima equazione si ottiene la relazione $y = 2x^2$ che, messa nella seconda equazione da' $4x^4 - x = 0$ cioè $x(4x^3 - 1) = 0$. Le soluzioni di questa equazione sono $x = 0$ e $x = (\frac{1}{4})^{1/3}$ e quindi i punti critici sono $(0, 0)$ e $((\frac{1}{4})^{1/3}, 2(\frac{1}{4})^{2/3})$.