ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, a.a. 2022-2023

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

30 gennaio 2023

TEMA 1

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \log x.$$

(a) Determinare il dominio, segno, eventuali simmetrie o periodicità;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Facoltativo: calcolare la derivata seconda di f e determinare gli intervalli di concavità e convessità di f.

Esercizio 2 (8 punti) Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \frac{e^{-x} - 1 + x}{\log(1 + x^2) - x^2}.$$

Esercizio 3 (8 punti)

1) Calcolare

$$\int \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx$$

2) Dire se è finito e in caso calcolare l'integrale

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx.$$

Esercizio 4 (8 punti)

Studiare al variare di $a > 0$ la convergenza della serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n} + 2}.$$

Facoltativo: Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n}+2}$, al variare di $a < 0$.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende esclusi i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.

Soluzioni

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \log x.$$

(a) Determinare il dominio, segno, eventuali simmetrie o periodicità;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Facoltativo: calcolare la derivata seconda di f e determinare gli intervalli di concavità e convessità di f.

Soluzione

(a) La funzione ha dominio $(0, +\infty)$, dato che il logaritmo è definito solo per argomenti positivi. Dato che il dominio non è simmetrico né periodico, la funzione non può avere simmetrie e peridicità. Infine dato che $x^{\frac{1}{3}} > 0$ per ogni x nel dominio, la funzione è positiva se e solo se $\log x > 0$, cioé se e solo se $x > 1$. Riassumendo $f(x) < 0$ per $x \in (0, 1)$, $f(1) = 0$ e $f(x) > 0$ per $x > 1$.

(b) Calcolo il limite in 0^+:

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{3}} \log x = 0$$

per il limite notevole, applicazione del confronto tra infiniti. Quindi posso estendere per continuità la funzione in $x = 0$ ponendo $f(0) = 0$.

Calcolo il limite a $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{3}} \log x = +\infty$$

dunque la funzione non ha asintoto orizzontale. Cerco un eventuale asintoto obliquo e calcolo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}} \log x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^{\frac{2}{3}}} = 0$$

per confronto tra infiniti. Quindi la funzione non ha asintoto obliquo.

(c) La funzione è continua nel suo dominio (esteso). Calcolo la derivata di f:

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} \log x + x^{\frac{1}{3}} \frac{1}{x} = \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{3} \log x + x^{-\frac{2}{3}} = x^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{3} \log x + 1 \right).$$

La funzione è derivabile in tutti i punti $x > 0$. Studio la derivabilità in $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} x^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{3} \log x + 1 \right) = -\infty.$$

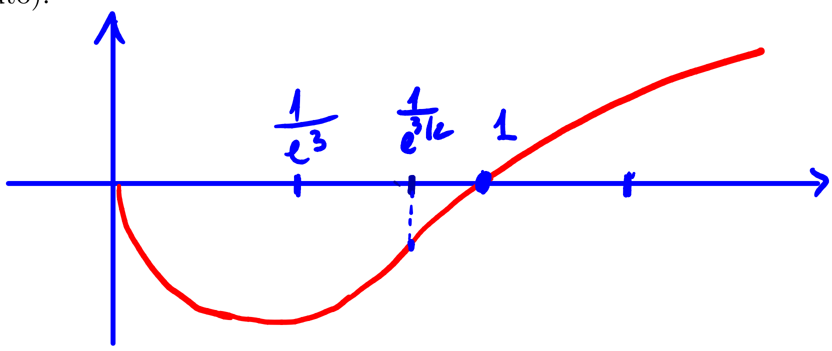
Quindi in $x = 0$ la funzione non è derivabile e il grafico avrà attacco verticale.

Calcoliamo il segno della derivata. Dato che $x^{-\frac{2}{3}} > 0$ per $x > 0$, si ha che $f'(x) > 0$ se e solo se $\frac{1}{3} \log x + 1 > 0$ cioè se e solo se

$$\log x > -3 (= \log e^{-3}) \qquad \text{cioè } x > e^{-3}.$$

La funzione è crescente in $(e^{-3}, +\infty)$ e decrescente in $(0, e^{-3})$. Il punto $x = e^{-3}$ è un punto di minimo locale (e anche assoluto), mentre il punto $x = 0$ è un punto di massimo locale (non assoluto).

(d)



Facoltativo: Calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = -\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}-1}\left(\frac{1}{3}\log x + 1\right) + x^{-\frac{2}{3}}\frac{1}{3}\frac{1}{x} = \frac{x^{-\frac{5}{3}}}{3}\left(-\frac{2}{3}\log x - 2 + 1\right) = x^{-\frac{5}{3}}\left(-\frac{2}{3}\log x - 1\right).$$

Dunque $f''(x) > 0$ se e solo se $-\frac{2}{3}\log x - 1 > 0$, cioé se e solo se $\log x < -\frac{3}{2} = \log e^{-\frac{3}{2}}$, e quindi se e solo se $x < e^{-\frac{3}{2}}$. La funzione è convessa in $(0, e^{-\frac{3}{2}})$ e concava in $(e^{-\frac{3}{2}}, +\infty)$.

Esercizio 2 (8 punti) Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \frac{e^{-x} - 1 + x}{\log(1 + x^2) - x^2}.$$

Soluzione Utilizzando i polinomi di Taylor riscriviamo numeratore e denominatore come polinomi nella variabile x, più un resto.

$$e^{-x} = 1 + (-x) + \frac{1}{2}(-x)^2 + o(-x)^2 = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

e quindi

$$e^{-x} - 1 + x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) = x^2\left(\frac{1}{2} + o(1)\right).$$

Inoltre

$$\log(1+x^2) = x^2 - \frac{1}{2}(x^2)^2 + o(x^2)^2 \qquad \text{e quindi } \log(1+x^2) - x^2 = -\frac{1}{2}x^4 + o(x^4) = x^4\left(-\frac{1}{2} + o(1)\right).$$

Sostituendo nel limite otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \frac{e^{-x} - 1 + x}{\log(1 + x^2) - x^2} = \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \frac{x^2\left(\frac{1}{2} + o(1)\right)}{x^4\left(-\frac{1}{2} + o(1)\right)} = \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha+2-4}\frac{\frac{1}{2} + o(1)}{-\frac{1}{2} + o(1)} = \begin{cases} -1 & \alpha = 2 \\ 0 & \alpha > 2 \\ -\infty & \alpha < 2. \end{cases}$$

Esercizio 3 (8 punti)

1) Calcolare

$$\int \frac{1}{x^2 - 3x + 2}dx$$

2) Dire se è finito e in caso calcolare l'integrale

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2-3x+2}dx.$$

Soluzione 1) Utilizziamo il metodo di scomposizione in fratti semplici. $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ e dunque cerco A, B tali che

$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}=\frac{Ax-2A+Bx-B}{(x-1)(x-2)}.$$

A, B devono risolvere il sistema

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B=1 \end{cases} \qquad \text{che ha soluzione } \begin{cases} A=-1 \\ B=1. \end{cases}$$

Dunque otteniamo

$$\int \frac{1}{x^2-3x+2}dx=\int \frac{-1}{x-1}dx+\int \frac{1}{x-2}dx=-\log|x-1|+\log|x-2|+c=\log\frac{|x-2|}{|x-1|}+c.$$

2)Per $x\to+\infty$ si ha che

$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x^2(1-3/x+2/x^2)}\sim\frac{1}{x^2}$$

dunque l'integrale converge per il criterio del confronto asintotico. Utilizzando la primitiva trovata nel punto precedente calcoliamo

$$\int_3^{+\infty}\frac{1}{x^2-3x+2}dx=\lim_{M\to+\infty}\int_3^M\frac{1}{x^2-3x+2}dx=\lim_{M\to+\infty}\left[\log\frac{|x-2|}{|x-1|}\right]_3^M$$

$$=\lim_{M\to+\infty}\log\frac{M-2}{M-1}-\log\frac{1}{2}=\lim_{M\to+\infty}\log\frac{1-2/M}{1-1/M}+\log 2=\log 2.$$

Esercizio 4 (8 punti)
Studiare al variare di $a>0$ la convergenza della serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{\sqrt{n}+2}.$$

Facoltativo: Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{\sqrt{n}+2}$, al variare di $a<0$.

Soluzione Utilzziamo il criterio della radice n-esima e otteniamo:

$$\sqrt[n]{\frac{a^n}{\sqrt{n}+2}}=\frac{a}{\left[\sqrt{n}\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\right]^{\frac{1}{n}}}=\frac{a}{n^{\frac{1}{2n}}\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{n}}}.$$

Ora osserviamo che $n^{\frac{1}{2n}}=e^{\frac{\log 2n}{n}}$ e quindi $\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{\log 2n}{n}}=1$ per confronto tra infiniti. In conclusione $\lim_n\sqrt[n]{a_n}=a$.
Alle stesse conclusioni si arriva usando il criterio della radice cioè calcolando

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a^{n+1}}{\sqrt{n+1}+2}\frac{\sqrt{n}+2}{a^n}=a.$$

.

Se $a > 1$ possiamo concludere che la serie diverge, se $0 < a < 1$ la serie converge. Se $a = 1$ il criterio non dà informazioni. Sostituisco il valore $a = 1$ nella serie e ottengo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+2}.$$

Ora per $n \to +\infty$

$$\frac{1}{\sqrt{n}+2} \sim \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

e dunque la serie diverge per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata con esponente $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$. In conclusione la serie converge per $0 < a < 1$ e diverge per $a \geq 1$.

Facoltativo. La convergenza assoluta si ottiene esattamente utilizzando gli argomenti visti sopra: quindi la serie converge se $|a| < 1$, cioé se $-1 < a < 1$, e diverge se $|a| \geq 1$, quindi se $a \leq -1$ oppure $a \geq 1$. Se la serie converge assolutamente converge anche semplicemente, quindi la serie converge semplicemente per $-1 < a < 1$. Se $a < -1$, abbiamo che $\lim_n \frac{|a|^n}{\sqrt{n}+2} = +\infty$, per confronto infiniti, e quindi $\lim_n \frac{a^n}{\sqrt{n}+2}$ non può essere 0. La serie non converge perché non è soddisfatta la condizione necessaria di convergenza. Se $a = -1$, sostituendo nella serie trovo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+2}.$$

Questa è una serie di termini a segno alterno, tale che $\lim_n \frac{1}{\sqrt{n}+2} = 0$ e inoltre $\left(\frac{1}{\sqrt{n}+2}\right)$ è una successione monotona decrescente, dato che $\sqrt{n+1}+2 \geq \sqrt{n}+2$. Possiamo concludere che per $a = -1$ la serie converge semplicemente per il criterio di Leibniz.