Analisi Matematica 2A

Nome, cognome, matricola: Scritto del 24/6/2024

Esercizio 1 (8 punti) Consideriamo sul rettangolo $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, |y| \leq 1\}$ la funzione $f : Q \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \varphi(x) + x \log(1 + y^2), \quad (x, y) \in Q,$$

dove $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ è una funzione data. Stabilire se esiste $\varphi \in C^2([0, 1])$ tale che f sia convessa su Q ed in caso affermativo esibire un esempio di tale φ.

Risposte. φ esiste si/no: NO Se sì, ad esempio $\varphi =$

Esercizio 2 (12 punti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione così definita:

$$f(x, y) = \frac{|x|^\alpha \sin(y/x)}{x^4 + y^2}, \quad \text{per } x \neq 0,$$

ed $f(0, y) = 0$ per $y \in \mathbb{R}$.

i) Determinare tutti i valori del parametro $\alpha > 0$ tali che f sia continua in $0 \in \mathbb{R}^2$.

ii) Determinare tutti i valori del parametro $\alpha > 0$ tali che f sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

Risposte: i) f cont. in 0 per $\alpha \in (3, \infty)$ ii) f diff. in 0 per $\alpha \in (4, \infty)$

Esercizio 3 (12 punti) Sia F l'insieme di tutte le funzioni $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ della forma, per $x \in [0, 1]$,

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(a_n x), \qquad \text{con } a_n \in \mathbb{R} \text{ e } |a_n| \leq \frac{1}{n}.$$

i) Provare che $F \subset C([0, 1])$, ovvero che tutte le funzioni in F sono continue.

ii) Provare che F è equicontinuo ed equilimitato.

iii) Stabilire se $F \subset C([0, 1])$ è compatto (per la metrica indotta da $\|\varphi\| = \max_{x \in [0,1]} |\varphi(x)|$).

Risposte: iii) F compatto si/no: Sì

2 ore e 30 minuti a disposizione