CALCOLO NUMERICO

Ing. chimica e dei materiali, Canale A - A.A. 2023-24

Laboratorio 11 - 22 maggio 2024

METODI ITERATIVI PER SISTEMI LINEARI

Problema. Data una matrice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ e un vettore $b \in \mathbb{R}^n$, trovare trovare $x \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$\boldsymbol{A}x = b$$

Idea. Definire una matrice $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})$ che sia facilmente invertible e tale che

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A} \approx I$$

Algorithm 1 Metodo di Jacobi/Gauss-Seidel/...

data una soluzione iniziale x_0, una tolleranza $TOLL$ e un numero massimo di iterazioni $ITMAX$;
$XK := x_0$; $SCARTO := 2 * TOLL$; $ITER = 0$;
while $SCARTO > TOLL$ & $ITER < ITMAX$ **do**
  $ITER := ITER + 1$;
  $RES := b - \boldsymbol{A} * XK$
  $XKP1 := XK + (\boldsymbol{P(A)})^{-1}RES$ (usare 'backslash' $P(A)\backslash RES$)
  $SCARTO := |RES|$;
end while

Scegliere $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})$. Si può decomporre la matrice $\boldsymbol{A}$ come $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{U}$, dove:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} &= \text{ Parte triangolare strettamente bassa} \\ \boldsymbol{D} &= \text{ Diagonale di A} \\ \boldsymbol{U} &= \text{ Parte triangolare strettamente alta} \end{aligned}$$

- Metodo di Jacobi

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{D} \quad \text{con} \quad \boldsymbol{D} = \text{ diagonale di A}$$

- Metodo di Gauss Seidel

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{D} \quad \text{con} \quad \begin{aligned} \boldsymbol{L} &= \text{ Parte triangolare strettamente bassa} \\ \boldsymbol{D} &= \text{ Diagonal di A} \end{aligned}$$

MATLAB - Alcuni comandi utili

- Come creare creare la matrice contenente la diagonale
  - `d = diag(A);`
    Restituisce un vettore colonna contenente i termini diagonali della matrice `A`
  - `v = [1;2;3]; D = diag(v);`
    Restituisce una matrice in cui i termini diagonali solo formati dagli elementi del vettore colonna `v` (con zeri fuori dalla diagonale)

  - `D = diag(diag(A))`
    Restituisce una matrice in cui la diagonale e' la stessa della matrice `A` in input (con zeri fuori dalla diagonale)

- Estrarre la sopra/sotto-diagonale
  - `L* = tril(A)`
    Restituisce una matrice formata solo dalla parte triangolare bassa di `A`, matrice di input
  - `L = tril(A,-1)`
    Restituisce una matrice formata solo dalla parte triangolare bassa stretta di `A`, matrice di input
  - `U* = triu(A)`
    Restituisce una matrice formata dalla parte triangolare alta
  - `U = triu(A,1)`
    Restituisce una matrice formata dalla parte triangolare alta stretta

ESERCIZIO 1.

- Implementare i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel specificando per i due metodi lo pseudo-codice (seguire lo schema generale riportato precedentemente).

  In ingresso: la matrice A, il vettore termine noto $\mathbf{b}$, il vettore iniziale $\mathbf{x}_0$, la tolleranza `toll` ed il numero massimo di iterazioni $k_{\max}$

  In uscita: la variabile X sarà una matrice le cui colonne corrispondono alle successive iterate (la colonna 1 conterrà $\mathbf{x}_0$, la colonna 2 conterrà $\mathbf{x}_1$, e così via). Il valore k conterrà il numero di iterazioni effettuate nel ciclo ed una variabile `flag`.

  `flag` risulta essere uguale ad 1 se la matrice $P = D$ (oppure P=L+D) è singolare (e quindi non si può applicare il metodo di Jacobi/Gauss-Seidel). All'interno dell'algoritmo si deve quindi prevedere un controllo su tale eventualità prima di applicare il ciclo `while`.

  Gli algoritmo dovranno avere la seguente intestazione:

  $$[X, k, \texttt{flag}] = \textbf{jacobi}(A, \mathbf{b}, \mathbf{x_0}, \texttt{toll}, k_{\max})$$
  $$[X, k, \texttt{flag}] = \textbf{seidel}(A, \mathbf{b}, \mathbf{x_0}, \texttt{toll}, k_{\max})$$

  Scrivere lo pseudo-codice e imprementare le due function `jacobi.m`, `seidel.m`

- Si scriva poi uno uno script `lab11_script.m` che risolva i sistemi seguenti:
  1. Leggere la matrice dal file `matrice.txt` e considerare il vettore `b=[4;11;29;30]`
  2. Considerare le seguenti istruzioni:
     `G = numgrid('S',12);`
     `A = delsq(G);`
     Risolvere il sistema lineare $Ax = b$, definendo il vettore b considerando che la soluzione vera sia il vettore con tutte le componenti unitarie

3. Definire la seguente matrice quadrata tridiagonale di dimensione $n \times n$, con $n = 50$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & & \\ 1 & 4 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -2 \\ & & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

con le istruzioni

```
n = 50;
A = diag(4*ones(n,1)) + diag(-2*ones(n-1,1),1) + diag(ones(n-1,1),-1)
```

Definire il vettore termine noto **b** in modo che la soluzione `sol` del sistema sia il vettore unitario $(1, \ldots, 1)^T$.

- Per ognuno dei 3 sistemi:
  - definire il vettore iniziale nullo, e porre uguale a 50 il numero massimo di iterate e definire una tolleranza per il test sulla norma dell'errore di 10^{-6}
  - far eseguire le function `jacobi` e `seidel`
  - controllare se il `flag` risulta diverso da zero (in tal caso si esca con un **errore**) (si testi questo controllo inserendo una istruzione temporanea che ponga a zero un elemento diagonale di A);
  - controllare che non si sia raggiunto il numero massimo di iterate (in caso contrario si visualizzi solo un **waring**; si provi termporaneamente questa condizione inserendo come `kmax` il valore 5);
  - se tutto va bene, visualizzare la dimensione del sistema, la tolleranza, il numero massimo di iterate, ed il numero di iterate (compresa la prima) costruite dalla function `jacobi`;
  - rappresentare su di un grafico (con titolo e label sugli assi) in scala logaritmica sull'asse y, per ogni iterata, a partire dal vettore iniziale, la norma euclidea degli scarti. Sovrapporre i grafici ottenuti per i due metodi.
  - (Facoltativo: Confrontare con il grafico analogo ottenuto considerando la norma del residuo. (OSSERVAZIONE: Per i sistemi 2/3: conosciamo la soluzione esatta, si puo' fare un grafico analogo con la norma dell'errore. Confrontare)
- **CONSEGNA:** Si crei un file .zip con i codici creati e il grafico ottenuto:

  si rinomini lo zip (**cognome_nome_lab11.zip**) e si carichi su moodle.